BAB 8
Interpolasi Linier, Kuadratik, Polinomial, dan Lagrange

Tujuan :

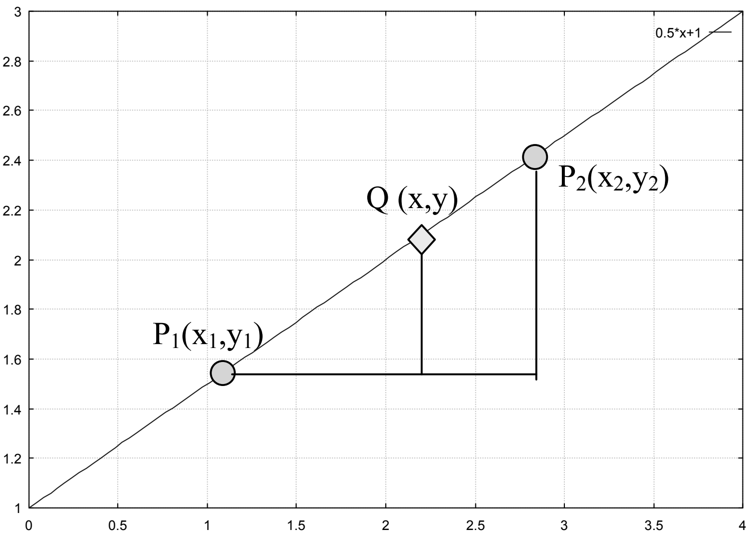
Mempelajari berbagai metode Interpolasi yang ada untuk menentukan titik-titik antara dari n buah titik dengan menggunakan suatu fungsi pendekatan tertentu. Metode Interpolasi yang dipelajari :

1. Interpolasi Linier
2. Interpolasi Kuadratik
3. Interpolasi Polinomial
4. Interpolasi Lagrange

Dasar Teori :

Interpolasi Linier

Menentukan titik-titik antara dari 2 buah titik dengan menggunakan garis lurus.



Gambar 22.1. Kurva untuk interpolasi linier

Persamaan garis lurus yang melalui 2 titik $P_1(x_1,y_1)$ dan $P_2(x_2,y_2)$ dapat dituliskan dengan:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Sehingga diperoleh persamaan dari interpolasi linier sebagai berikut:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) + y_1$$

Algoritma Interpolasi Linier :

(1) Tentukan dua titik P1 dan P2 dengan koordinatnya masing-masing (x1,y1) dan (x2,y2)

(2) Tentukan nilai x dari titik yang akan dicari

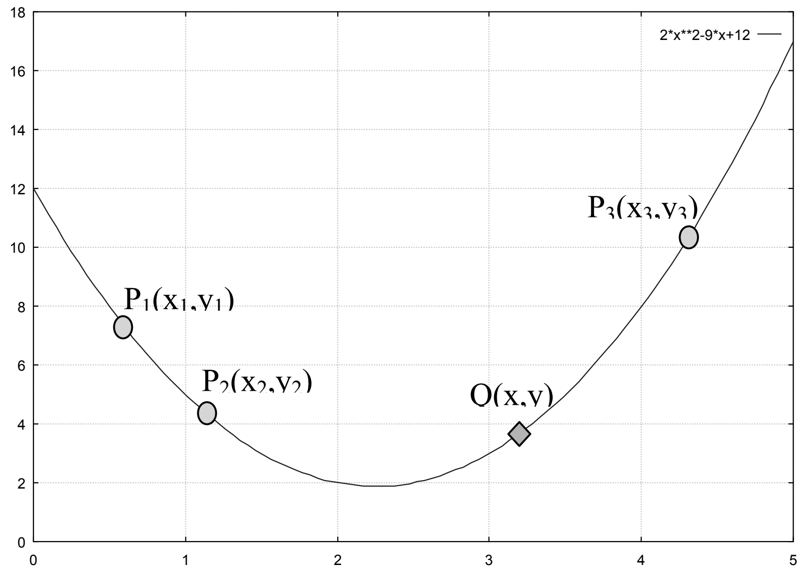
(3) Hitung nilai y dengan :

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) + y_1$$

(4) Tampilkan nilai titik yang baru Q(x,y)

Interpolasi Kuadratik

Interpolasi Kuadratik digunakan untuk mencari titik-titik antara dari 3 buah titik $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ dan $P_3(x_3,y_3)$ dengan menggunakan pendekatan fungsi kuadrat.



Gambar 22.2. Kurva untuk interpolasi kuadratik

Untuk memperoleh titik Q(x,y) digunakan interpolasi kuadratik sebagai berikut:

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Algoritma Interpolasi Kuadratik:

(1) Tentukan 3 titik input $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ dan $P_3(x_3,y_3)$

(2) Tentukan nilai x dari titik yang akan dicari

(3) Hitung nilai y dari titik yang dicari menggunakan rumus dari interpolasi kuadratik:

$$y = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

(4) Tampilkan nilai x dan y

Interpolasi Polinomial

Interpolasi polynomial digunakan untuk mencari titik-titik antara dari n buah titik $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$, …, $P_N(x_N,y_N)$ dengan menggunakan pendekatan fungsi polynomial pangkat n-1:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

Masukkan nilai dari setiap titik ke dalam persamaan polynomial di atas dan diperoleh persamaan simultan dengan n persamaan dan n variable bebas:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} \\
y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} \\
y_3 &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 + \ldots + a_{n-1} x_3^{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1}
\end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan simultan di atas adalah nilai-nilai $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ yang merupakan nilai-nilai koefisien dari fungsi pendekatan polynomial yang akan digunakan.

Dengan memasukkan nilai x dari titik yang dicari pada fungsi polinomialnya, akan diperoleh nilai y dari titik tersebut.

Algoritma Interpolasi Polynomial :

(1) Menentukan jumlah titik N yang diketahui.

(2) Memasukkan titik-titik yang diketahui $P_i = (x_i, y_i)$ untuk i=1,2,3,…,N

(3) Menyusun augmented matrik dari titik-titik yang diketahui sebagai berikut:

$$J = \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & y_1 \\
1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & y_2 \\
1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} & y_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & y_n
\end{array}\right]$$

(4) Menyelesaikan persamaan simultan dengan augmented matrik di atas dengan menggunakan metode eliminasi gauss/Jordan.
(5) Menyusun koefisien fungsi polynomial berdasarkan penyelesaian persamaan simultan di atas.

$$a = \{a_i | a_i = J(i,n), 0 \le i \le n-1\}$$

(6) Memasukkan nilai x dari titik yang diketahui
(7) Menghitung nilai y dari fungsi polynomial yang dihasilkan

$$y = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i$$

(8) Menampilkan titik (x,y)

Interpolasi Lagrange

Interpolasi polynomial digunakan untuk mencari titik-titik antara dari n buah titik $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$, …, $P_N(x_N,y_N)$ dengan menggunakan pendekatan fungsi polynomial yang disusun dalam kombinasi deret dan didefinisikan dengan:

$$y = \sum_{i=1}^{N} y_i \prod_{j \ne i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Algoritma Interpolasi Lagrange :

(1) Tentukan jumlah titik (N) yang diketahui
(2) Tentukan titik-titik $P_i(x_i,y_i)$ yang diketahui dengan i=1,2,3,…,N
(3) Tentukan x dari titik yang dicari
(4) Hitung nilai y dari titik yang dicari dengan formulasi interpolasi lagrange

$$y = \sum_{i=1}^{N} y_i \prod_{j \ne i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

(5) Tampilkan nilai (x,y)