Bab 7
Penyelesaian Persamaan Differensial

Persamaan differensial merupakan persamaan yang menghubungkan suatu besaran dengan perubahannya. Persamaan differensial dinyatakan sebagai persamaan yang mengandung suatu besaran dan differensialnya, dan dituliskan dengan :

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}, t\right) = 0$$

Persamaan differensial mempunyai banyak ragam dan jenis mulai dari yang mudah diselesaikan hingga yang sulit diselesaikan, mulai dari yang sederhana sampai yang sangat kompleks. Salah satu persamaan differensial yang banyak digunakan dalam penerapannya adalah **Persamaan Differensial Linier**, yang dituliskan dengan:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + .. + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

Persamaan differensial linier umumnya dapat diselesaikan dengan menggunakan cara analitik seperti pemakaian Transformasi Laplace, tetapi pada bentuk yang kompleks persamaan differensial linier ini menjadi sulit diselesaikan.

Metode numerik dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial dengan menggunakan bantuan komputer sebagai alat hitung, ketika metode analitik sulit digunakan. Pada beberapa bentuk persamaan differensial, khususnya pada differensial non-linier, penyelesaian analitik sulit sekali dilakukan sehingga metode numerik dapat menjadi metode penyelesaian yang disarankan. Sebagai contoh perhatikan bentuk persamaan differensial yang sederhana berikut ini:

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - y = 1$$

Persamaan diffrensial di atas tampaknya sederhana, tetapi untuk menyelesaikan persamaan diffrensial di atas bukanlah sesuatu yang mudah, bahkan dapat dikatakan dengan menggunakan cara analitik, tidak dapat ditemukan penyelesaian. Sehingga pemakaian metode-metode pendekatan dengan metode numerik menjadi suatu alternatif yang dapat digunakan.

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial, antara lain: metode Euler, metode pendekatan dengan deret Taylor, metode runge-kutta dan metode-metode prediktor-korektor seperti metode Adam Moulton. Hanya saja metode-metode pendekatan ini menyebabkan penyelesaian yang dihasilkan bukanlah penyelesaian umum dari persamaan differensial, tetapi penyelesaian khusus dengan nilai awal dan nilai batas yang ditentukan.

Permasalahan persamaan differensial ini merupakan permasalahan yang banyak ditemui ketika analisa yang dilakukan tergantung pada waktu dan nilainya mengalami perubahan-perubahan berdasarkan waktu. Hampir banyak model matematis di dalam ilmu teknik menggunakan pernyataan dalam persamaan differensial.

7.1. Metode Euler

Perhatikan bentuk persamaan differensial berikut:

$$y' = f(x,y)$$

Dengan menggunakan pendekatan nilai awal (x_0,y_0) maka nilai-nilai y berikutnya daat diperoleh dengan:

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n)$$

Contoh:

Diketahui persamaan differensial berikut:

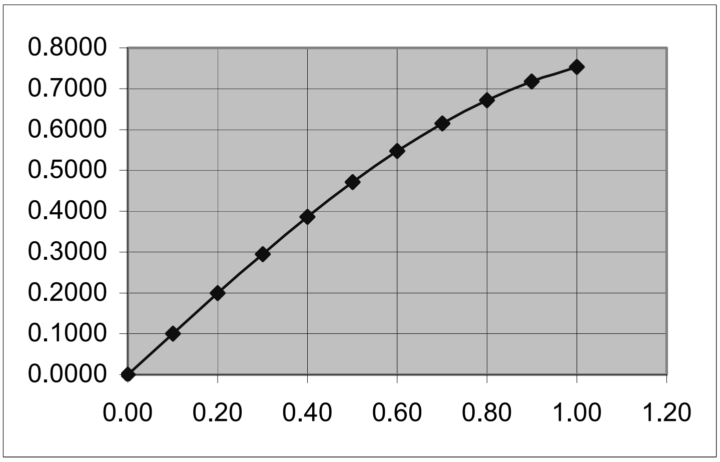
$$\frac{dy}{dx} + xy = 1$$

Maka :

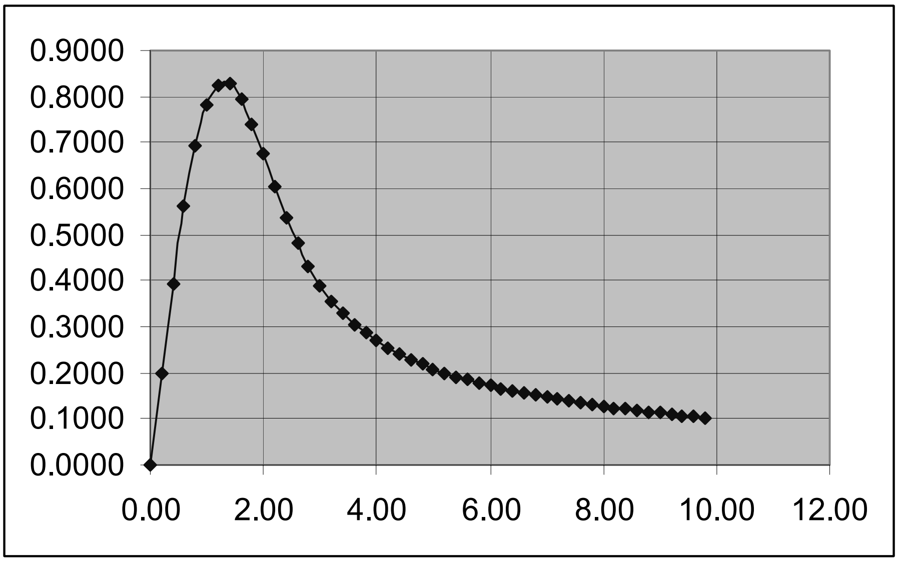
$$y' = 1 - xy \quad \text{atau} \quad f(x,y) = 1 - xy$$

Bila ditentukan nilai awalnya adalah (0,0) dan h=0.1 maka diperoleh :

n	x	y
0	0.00	0.0000
1	0.10	0.1000
2	0.20	0.1990
3	0.30	0.2950
4	0.40	0.3862
5	0.50	0.4707
6	0.60	0.5472
7	0.70	0.6144
8	0.80	0.6714
9	0.90	0.7176
10	1.00	0.7531



Bila ditingkatkan untuk x sampai dengan 10 kemudian diambil grafiknya, diperoleh :



7.2. Metode Taylor

Metode Taylor adalah suatu metode pendekatan yang menggunakan deret Taylor sebagai bentuk perbaikan nilai untuk nilai fungsi secara keseluruhan pada penyelesaian persamaan differensial. Perhatikan fungsi dari persamaan differensial berikut:

$$y' = f(x, y)$$

Dengan memberikan nilai pendekatan awal (x_0,y_0), penyelesaian dapat diperoleh dengan:

$$y(x) = y_0 + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{k!} y^{(k)}(x_0)$$

Contoh:

Diketahui persamaan differensial :

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin x$$

Maka : $y' = \sin x - y$ atau $f(x, y) = \sin x - y$

$$y'' = f'(x, y) = f_x + f_y y' = \cos x - (1)(\sin x - y)$$

$$= \cos x - \sin x + y$$

$$y^{(3)} = -\sin x - \cos x + (1)(\sin x - y)$$

$$= -\cos x - y$$

Dengan pendekatan awal (0,0) maka untuk x=1, nilai y dapat dihitung dengan:

$$y = 0 + (1 - 0)[\sin(0) - 0] + \frac{1}{2}[\cos(0) - \sin(0) + 0] + \frac{1}{6}[-\cos(0) - 0]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Catatan:

Pemakaian metode Taylor tidak banyak digemari karena diperlukan perhitungan yang cukup rumit dalam penyelesaiannya. Tetapi metode ini dapat menunjukkan hasil yang bagus pada beberapa permasalahan penyelesaian persamaan differensial.

7.3. Metode Runge Kutta

Metode Runge-Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler, dimana perhitungan penyelesaian dilakukan step demi step. Untuk fungsi dari persamaan differensial :

$$y' = f(x, y)$$

Dengan titik pendekatan awal (x_0,y_0), berdasarkan metode Euler nilai fungsi penyelesaian diperoleh dengan :

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n) \quad \text{atau}$$

$$y_{n+1} = y_n + dy$$

dimana *dy* adalah nilai perubahan nilai fungsi setiap step

Metode Runge-Kutta 2:

Metode Runge-Kutta membuat step yang lebih kecil dari perubahan nilai dengan membagi nilai perubahan tiap step menjadi sejumlah bagian yang ditentukan, bentuk paling sederhana dari metode Runge Kutta ini adalah membagi bagian perubahan menjadi dua bagian sehingga :

$$dy = \frac{h.f_1 + h.f_2}{2}$$

dimana f1 dan f2 adalah nilai fungsi step yang diambil dari bentuk fungsi persamaan differensial pada step tengahan.

Sehingga diperoleh formulasi dari Metode Runge-Kutta 2 sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

dimana: $k_1 = h.f(x_n, y_n)$

$k_2 = h.f(x_n + h, y_n + k_1)$

Contoh:

Selesaikan persamaan differensial berikut:

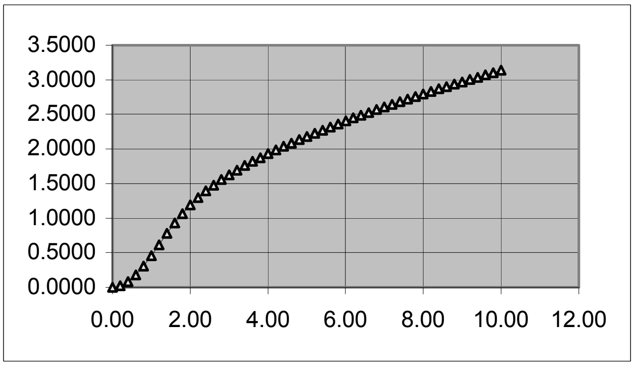
$$\frac{dy}{dx} + y^2 = x$$

Fungsi persamaan differensial adalah : $y' = f(x,y) = x - y^2$

Dengan nilai pendekatan awal (0,0) diperoleh:

n	x	k1	k2	y
0	0.00	-	-	0.0000
1	0.10	0.0000	0.0100	0.0050
2	0.20	0.0100	0.0200	0.0200
3	0.30	0.0200	0.0298	0.0449
4	0.40	0.0298	0.0394	0.0795
5	0.50	0.0394	0.0486	0.1235
6	0.60	0.0485	0.0570	0.1762
7	0.70	0.0569	0.0646	0.2370
8	0.80	0.0644	0.0709	0.3046
9	0.90	0.0707	0.0759	0.3779
10	1.00	0.0757	0.0794	0.4555

Bila hasilnya diteruskan sampai x=10 dan digambarkan, akan diperoleh:



Metode Runge Kutta 4

Bila pada metode Runge-Kutta 2, nilai koefisien perbaikannya adalah 2 buah, maka pada metode ini menggunakan 4 nilai koefisien perbaikan yaitu k_1, k_2, k_3, k_4 yang diberikan sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dimana : $k_1 = h.f(x_n, y_n)$

$$k_2 = h.f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h.f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h.f(x_n + h, y_n + k_3)$$

Contoh:

Hitung penyelesaian persamaan differensial berikut:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = e^{-x}$$

Fungsi persamaan differensial: $f(x, y) = \sqrt{e^{-x} + y}$

Bila ditentukan pendekatan awal (0,0) dan step h=0.1, dengan menggunakan metode Euler 4 diperoleh:

n	x	k1	k2	k3	k4	y
0	0.00	-	-	-	-	0
1	0.10	0.10000	0.10006	0.10006	0.10024	0.10008
2	0.20	0.10025	0.10054	0.10055	0.10096	0.20065
3	0.30	0.10096	0.10149	0.10150	0.10213	0.30216
4	0.40	0.10213	0.10285	0.10287	0.10370	0.40504
5	0.50	0.10370	0.10462	0.10464	0.10565	0.50968
6	0.60	0.10565	0.10675	0.10677	0.10795	0.61646
7	0.70	0.10795	0.10920	0.10923	0.11056	0.72568
8	0.80	0.11056	0.11195	0.11198	0.11345	0.83766
9	0.90	0.11345	0.11497	0.11500	0.11659	0.95266
10	1.00	0.11659	0.11822	0.11826	0.11995	1.07091

7.4. Persamaan Differensial Tingkat Tinggi

Pada banyak penerapan, persamaan differensial yang digunakan adalah persamaan differensial tingkat tinggi, baik itu tingkat 2, 3 dan seterusnya. Sedangkan pembahasan di depan adalah penyelesaian persamaan differensial tingkat satu yang dinyatakan dengan fungsi :

$$y' = f(x, y)$$

Untuk menyelesaikan persamaan differensial tingkat tinggi, diperlukan pengembangan model persamaan differensial yang akan menghasilkan pengembangan bentuk metode yang digunakan. Pada buku ini dibahas pemakaian metode Euler dan Runge Kutta untuk menyelesaikan persamaan differensial tingkat tinggi ini.

Perhatikan persamaan differensial tingkat n berikut ini:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = F(x)$$

Ubah variabel-variabel differensial dengan variabel-variabel index sebagai berikut:

$$y_1 = y$$
$$y_2 = y'$$
$$y_3 = y''$$
....
$$y_n = y^{(n-1)}$$

Dengan mendifferensialkan setiap variabel di atas diperoleh:

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
....
$$y_{n-1}' = y_n$$
$$y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

Setiap differensial menyatakan suatu fungsi persamaan differensial tingkat satu, sehingga untuk menyelesaiakan persamaan differensial tingkat n diperlukan n fungsi persamaan differensial tingkat satu yang bekerja secara bersama-sama.

7.4.1. Penyelesaian Persamaan Differensial Tingkat 2 Dengan Metode Euler

Perhatikan persamaan differensial tingkat 2 berikut:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Ubah variabel: *y=y* dan *z=y'* sehingga diperoleh 2 persamaan differensial tingkat satu berikut:

$$y' = z$$
$$z' = F(x, y, z)$$

ini berarti diperoleh 2 fungsi masing-masing:

$$f(x, y, z) = z$$
$$g(x, y, z) = F(x, y, z)$$

Dengan menggunakan metode Euler diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + h.f(x_n, y_n, z_n)$$
$$z_{n+1} = z_n + h.g(x_n, y_n, z_n)$$

Contoh:

Selesaiakan persamaan differensial:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2xy = 1$$

Maka diperoleh dua fungsi f(x,y,z) dan g(x,y,z) berikut:

$$f(x, y, z) = z$$
$$g(x, y, z) = 1 - 2xy - 3z$$

Bila ditentukan pendekatan awal x_0=0, y_0=0, z_0=0 dan step h=0.2, maka dengan metode euler diperoleh:

n	x	y	z = y'
0	0.00	0.00000	0.00000
1	0.20	0.00000	0.20000
2	0.40	0.04000	0.28000
3	0.60	0.09600	0.30560
4	0.80	0.15712	0.29920
5	1.00	0.21696	0.26940
6	1.20	0.27084	0.22098
7	1.40	0.31504	0.15839
8	1.60	0.34671	0.08693
9	1.80	0.36410	0.01288
10	2.00	0.36668	-0.05700

7.4.2. Penyelesaian Persamaan Differensial Tingkat 2 Dengan Metode Runge-Kutta 2

Perhatikan persamaan differensial tingkat 2 berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Ubah variabel: *y=y* dan *z=y'* sehingga diperoleh 2 persamaan differensial tingkat satu berikut:

$$y' = z$$
$$z' = F(x, y, z)$$

ini berarti diperoleh 2 fungsi masing-masing:

$$f(x, y, z) = z$$
$$g(x, y, z) = F(x, y, z)$$

Dengan menggunakan metode Runge-Kutta 2 diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$
$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$$

dimana:

$$k_1 = h.f(x, y, z)$$
$$l_1 = h.g(x, y, z)$$
$$k_2 = h.f(x + h, y + k_1, z + l_1)$$
$$l_2 = h.g(x + h, y + k_1, z + l_1)$$

Contoh:
Selesaikan persamaan differensial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2xy = 1$$

Maka diperoleh dua fungsi f(x,y,z) dan g(x,y,z) berikut:

$$f(x,y,z) = z$$

$$g(x,y,z) = 1 - 2xy - 3z$$

Bila ditentukan pendekatan awal x_0=0, y_0=0, z_0=0 dan step h=0.2, maka dengan metode euler diperoleh:

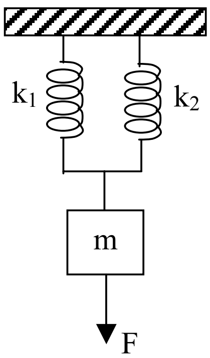
n	x	k1	l1	k2	l2	y	z = y'
0	0.00	-	-	-	-	0	0
1	0.20	0.00000	0.20000	0.04000	0.08000	0.020000	0.14000
2	0.40	0.02800	0.11440	0.05088	0.03968	0.059440	0.21704
3	0.60	0.04341	0.06027	0.05546	0.00893	0.108875	0.25164
4	0.80	0.05033	0.02289	0.05491	-0.01566	0.161491	0.25525
5	1.00	0.05105	-0.00483	0.05008	-0.03527	0.212059	0.23520
6	1.20	0.04704	-0.02595	0.04185	-0.04992	0.256505	0.19727
7	1.40	0.03945	-0.04148	0.03116	-0.05921	0.291810	0.14692
8	1.60	0.02938	-0.05157	0.01907	-0.06278	0.316038	0.08975
9	1.80	0.01795	-0.05611	0.00673	-0.06065	0.328377	0.03137
10	2.00	0.00627	-0.05525	-0.00478	-0.05339	0.329125	-0.02295

7.5. Beberapa Penerapan Persamaan Differensial

Pada sub bab ini akan dibahas beberapa penerapan persamaan differensial pada sistem mekanis dan sistem listrik, serta penyelesaiannya secara numerik.

7.5.1. Penerapan Persamaan Differensial Pada Sistem Mekanis

Perhatikan gambar sistem pegas berikut ini:



Model matematik untuk sistem pegas di atas adalah:

$$F + m\frac{d^2x}{dt^2} = (k_1 + k_2)x$$

dimana x adalah besarnya simpangan.

Bila F ditentukan, misalnya 10 N, maka diperoleh persamaan differensial tingkat 2 sebagai berikut:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}\left[(k_1 + k_2)x - 10\right]$$

Dengan menggunakan pengubahan variabel y=y dan z=y' diperoleh dua fungsi persamaan differensial yaitu:

$$f(x,y,z) = z$$

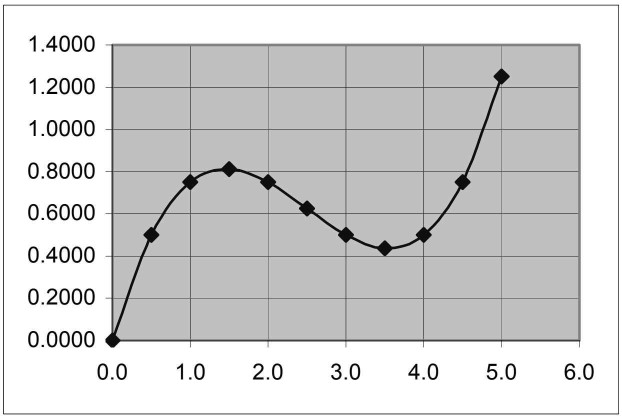
$$g(x,y,z) = \frac{1}{m}\left[(k_1 + k_2)x - 10\right]$$

Bila ditentukan m=10, k_1=2 dan k_2 = 5 diperoleh:

$$g(x,y,z) = \frac{1}{2}x - 1$$

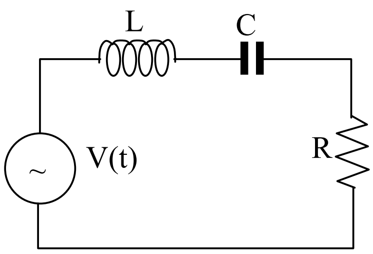
Dengan step h = 0.5, pendekatan awal (0,0) dengan y'=1, metode Euler akan menghasilkan :

n	x	y	z
0	0.0	0.0000	1.0000
1	0.5	0.5000	0.5000
2	1.0	0.7500	0.1250
3	1.5	0.8125	-0.1250
4	2.0	0.7500	-0.2500
5	2.5	0.6250	-0.2500
6	3.0	0.5000	-0.1250
7	3.5	0.4375	0.1250
8	4.0	0.5000	0.5000
9	4.5	0.7500	1.0000
10	5.0	1.2500	1.6250



7.5.2. Penerapan Persamaan Differensial Pada Sistem Listrik

Perhatikan gambar rangkaian listrik berikut ini:



Model matematis untuk rangkaian listrik di atas adalah:

$$C\frac{dV}{dt} + \frac{1}{R}V + L\int_0^t V(u)du = E$$

Bentuk persamaan di atas adalah persamaan differensial integral, persamaan tersebut dapat diubah menjadi persamaan differensial tingkat 2 sebagai berikut:

$$C\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} + LV = E'$$

Karena E' berupa konstanta maka dapat dituliskan sebagai E saja.
Bila nilai-nilai L, R, C, dan E ditentukan, misalkan C=10^{-5}, R=10K, L=10^{-4} dan E=1 maka diperoleh persamaan differensial tingkat 2:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 10\frac{dV}{dt} + 10V = 1$$

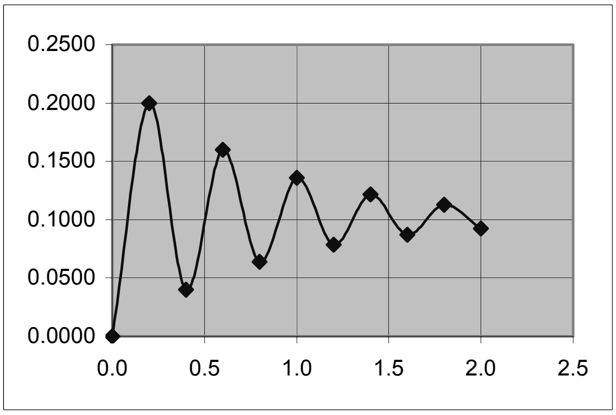
dengan mengambil variabel x=t, y=V dan z=V' diperoleh dua fungsi :

$$f(x, y, z) = z$$

$$g(x, y, z) = 1 - 10y - 10z$$

Dengan menentukan pendekatan awal t=0, V(0)=0, V'(0)=1 dan h=0.2, dan dengan menggunakan metode Euler diperoleh penyelesaian:

n	x	y	z
0	0.0	0.0000	1.0000
1	0.2	0.2000	-0.8000
2	0.4	0.0400	0.6000
3	0.6	0.1600	-0.4800
4	0.8	0.0640	0.3600
5	1.0	0.1360	-0.2880
6	1.2	0.0784	0.2160
7	1.4	0.1216	-0.1728
8	1.6	0.0870	0.1296
9	1.8	0.1130	-0.1037
10	2.0	0.0922	0.0778



7.6. Tugas

(1) Selesaikan persamaan differensial berikut:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

menggunakan metode Euler, Runge-Kutta 2 dan Runge-Kutta 4 dengan h=0.1 dan titik pendekatan awal (0,1).
Persamaan differensial di atas secara analitik mempunyai penyelesaian umum:

$$y = e^{-2x}$$

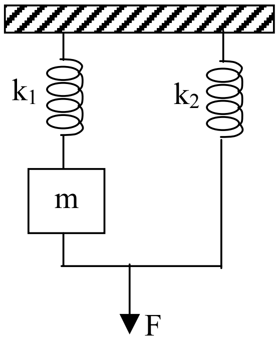
Bandingkan hasil ketiga metode dengan nilai penyelesaian umumnya.

(2) Selesaikan persamaan differensial berikut:

$$\frac{dy}{dx} = (1 - xy)e^{-x}$$

menggunakan metode Euler, Runge-Kutta 2 dan Runge-Kutta 4 dengan h=0.2 dan titik pendekatan awal (0,0).

(3) Perhatikan sistem mekanis berikut ini:



Model matematis dari sistem di atas adalah:

$$F = \left(k_1 - m\frac{d^2x}{dt^2} \right) x + k_2 x$$

Bila ditentukan nilai F=10, m=10, k1=2 dan k2=3, dan titik pendekatan awal (0,0) dan x'(0)=1. Tentukan penyelesaian persamaan differensial di atas.