BAB 5
DIFFERENSIASI NUMERIK

5.1. Permasalahan Differensiasi Numerik

Salah satu perhitungan kalkulus yang banyak digunakan adalah differensial, dimana differensial ini banyak digunakan untuk keperluan perhitungan geometrik.Dan perhitungan-perhitungan yang berhubungan dengan perubahan nilai per-satuan waktu atau jarak.Secara kalkulus, differensial didefinisikan sebagai perbandingan perubahan tinggi (selisih tinggi) dan perubahan jarak, dan dituliskan dengan :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{ax \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Hampir semua fungsi kontinu dapat dihitung nilai differensialnya secara mudah, sehingga dapat dikatakan metode numerik dianggap tidak perlu digunakan untuk keperluan perhitungan differensial ini.Masalahnya seiring dengan perkembangannya pemakaian komputer sebagai alat hitung dan pada banyak permasalahan differensial adalah salah satu bagian dari penyelesaian, sebagai contoh metode newton raphson memerlukan differensial sebagai pembagi nilai perbaikan errornya, sehingga metode newton raphson ini hanya bisa dilakukan bila nilai differensialnya bisa dihitung.

Contoh lainnya adalah penentuan titik puncak kurva y = f(x) yang dinamakan titik maksimal dan titik minimal, juga memerlukan titik differensial sebagai syarat apakah titik tersebut sebagai titik puncak.Dimana didefinisikan bahwa suatu titik dinamakan titik puncak bila differensial $\frac{dy}{dx}$ pada titik tersebut adalah 0.

Pada beberapa permasalahan, nilai differensial dapat dihitung secara manual.Misalkan diketahui $f(x) = xe^{-x} + \cos x$ maka differensialnya adalah $F^1(x) = (1-x)\,e^{-x} - \sin x$.Tetapi pada permasalahan lain nilai fungsi sulit diselesaikan secara manual.Terutama jika fungsinya hanya diketahui berupa nilai atau grafis. Misalkan menghitung puncak distribusi data yang berupa distribusi poisson.

$$f(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

Menghitung differensial ini tidak mudah, disinilah metode numerik dapat digunakan.
Hubungan antara nilai fungsi dan perubahan fungsi untuk setiap titiknya didefinisikan dengan :

$$y = f(X) + f^1(x).h(x)$$

dan $F^1(x)$ didefinisikan dengan :

$$f^1(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dari formulasi ini dapat diturunkan beberapa metode differensiasi numerik, antara lain :

*. Metode Selisih Maju

*. Metode Selisih Tengahan

5.2. Metode Selisih Maju

Metode selisih maju merupakan metode yang mengadopsi secara langsung definisi differensial, dan dituliskan :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pengambilan h diharapkan pada nilai yang kecil agar errornya kecil, karena metode ini mempunyai error sebesar :

$$E(f) = -\frac{1}{2} h f^{11}(x)$$

Contoh 5.1:

Hitung differensial *$f(x)=e^{-x}\sin(2x)+1$* dari range x=[0,1] dengan h=0.05

X	f(x)	f'(x)	eksak	error
0	1	-	1	-
0.05	1.04754	0.950833	0.902499	0.0483341
0.1	1.09033	0.855827	0.809984	0.0458431
0.15	1.12862	0.765792	0.722421	0.0433711
0.2	1.16266	0.680682	0.639754	0.040928
0.25	1.19268	0.600434	0.561911	0.0385228
0.3	1.21893	0.524967	0.488804	0.0361632
0.35	1.24164	0.454185	0.420329	0.0338562
0.4	1.26103	0.387978	0.356371	0.0316077
0.45	1.27735	0.326227	0.296804	0.0294228
0.5	1.29079	0.2688	0.241494	0.0273059
0.55	1.30156	0.21556	0.1903	0.0252606
0.6	1.30988	0.166361	0.143071	0.0232898
0.65	1.31594	0.121053	0.0996572	0.0213958
0.7	1.31991	0.0794806	0.0599004	0.0195802
0.75	1.32198	0.0414863	0.023642	0.0178443
0.8	1.32233	0.00691036	-0.009278	0.0161887
0.85	1.32111	-0.0244081	-0.0390218	0.0146137
0.9	1.31848	-0.0526302	-0.0657492	0.013119
0.95	1.31458	-0.0779162	-0.0896204	0.0117042
1	1.30956	-0.100425	-0.110794	0.0103684

```
Rata-rata error adalah 0.0737486
```

5.3. Metode Selisih Tengahan

Metode selisih tengahan merupakan metode pengambilan perubahan dari dua titik sekitar dari titik yang diukur.Perhatikan selisih maju pada titik x-h adalah :

$$f_1^1(x-h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Dan selisih maju pada titik x adalah :

$$f_2^1(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Metode selisih tengahan merupakan rata-rata dari dua selisih maju :

$$f^1(x) = \frac{f_1^1(x) + f_2^{1(x)}}{2}$$

Atau dituliskan :

$$f^{1}(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Kesalahan pada metode ini adalah :

$$E(f) = -\frac{h^2}{6} f^{111}(\eta)$$

Metode selisih tengahan ini yang banyak digunakan sebagai metode differensiasi numerik.

Contoh 5.2 :

Hitung differensial $f(x)=e^{-x}sin(2x)+1$ dari range x=[0,1] dengan h=0.05

x	f(x)	f'(x)	eksak	error
0	1	1.00083	1	0.000833125
0.05	1.04754	0.90333	0.902499	0.000831131
0.1	1.09033	0.810809	0.809984	0.000825373
0.15	1.12862	0.723237	0.722421	0.000816238
0.2	1.16266	0.640558	0.639754	0.000804089
0.25	1.19268	0.562701	0.561911	0.000789273
0.3	1.21893	0.489576	0.488804	0.000772113
0.35	1.24164	0.421082	0.420329	0.000752913
0.4	1.26103	0.357103	0.356371	0.00073196
0.45	1.27735	0.297514	0.296804	0.000709519
0.5	1.29079	0.24218	0.241494	0.000685839
0.55	1.30156	0.190961	0.1903	0.00066115
0.6	1.30988	0.143707	0.143071	0.000635667
0.65	1.31594	0.100267	0.0996572	0.000609585
0.7	1.31991	0.0604834	0.0599004	0.000583086
0.75	1.32198	0.0241983	0.023642	0.000556336
0.8	1.32233	-0.00874888	-0.00927837	0.000529485
0.85	1.32111	-0.0385191	-0.0390218	0.000502671
0.9	1.31848	-0.0652732	-0.0657492	0.000476018
0.95	1.31458	-0.0891708	-0.0896204	0.000449637
1	1.30956	-0.11037	-0.110794	0.000423628
Rata-rata error = 0.000665659				

5.4. Differensiasi Tingkat Tinggi

Defferensiasi tingkat tinggi merupakan proses pendefferensialan secara terus-menerus, hingga tingkatan yang ditentukan.

(1) Differensial tingkat 2 adalah :

$$f''(x) = f'\{f'(x)\}$$

(2) Differensial tingkat 3 adalah :

$$f^{(3)}(x) = f'\{f''(x)\}$$

(3) Differensial tingkat n adalah :

$$f^{(n)}(x) = f^{1}\{f^{n-1}(x)\}$$

Dapat dituliskan :

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right\}$$

Untuk menghitung differensial tingkat tinggi ini dapat digunakan metode differensiasi yang merupakan pengembangan metode selisih tengahan yaitu :
Differensiasi tingkat 2

$$f''(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(a+h)}{h^2}$$

Untuk menghitung differensial tingkat 2 ini maka diambil h yang kecil, karena error dari metode ini :

$$\mathrm{E}(f) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\eta)$$

Kesalahan ini dinamakan kesalahan diskritisasi.

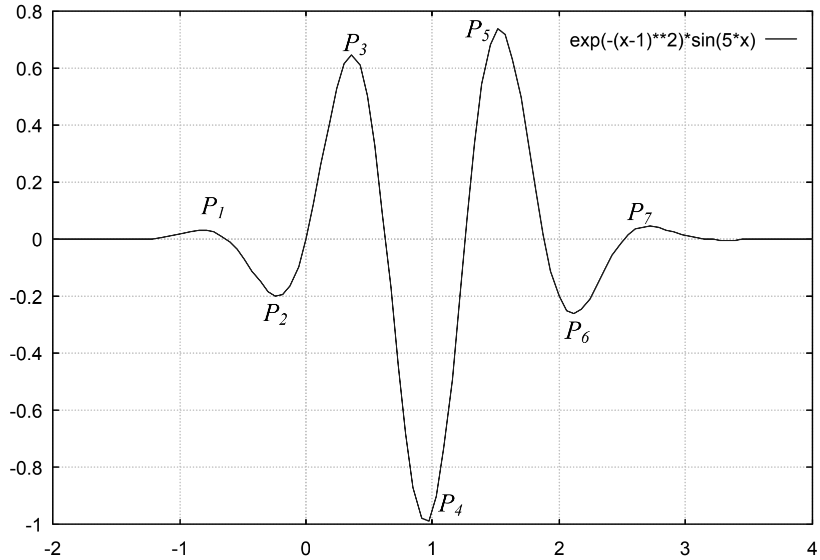
Contoh 5.4:
Hitung differensial kedua dari $f(x)=e^{-x}\sin(2x)+1$ dari range x=[0,1] dengan h=0.05

x	f(x)	f"(x)	eksak	error
0	1	-2	-2	1.38889e-007
0.05	1.04754	-1.90012	-1.90008	3.94861e-005
0.1	1.09033	-1.80071	-1.80063	7.51525e-005
0.15	1.12862	-1.70219	-1.70209	0.000107067
0.2	1.16266	-1.60496	-1.60482	0.000135436
0.25	1.19268	-1.50934	-1.50918	0.000160461
0.3	1.21893	-1.41564	-1.41546	0.000182341
0.35	1.24164	-1.32413	-1.32393	0.000201271
0.4	1.26103	-1.23503	-1.23481	0.000217443
0.45	1.27735	-1.14853	-1.1483	0.000231042
0.5	1.29079	-1.0648	-1.06456	0.000242248
0.55	1.30156	-0.983979	-0.983728	0.000251235
0.6	1.30988	-0.906166	-0.905908	0.000258172
0.65	1.31594	-0.831448	-0.831184	0.000263221
0.7	1.31991	-0.759885	-0.759619	0.000266538
0.75	1.32198	-0.691519	-0.691251	0.000268271
0.8	1.32233	-0.62637	-0.626101	0.000268564
0.85	1.32111	-0.564441	-0.564173	0.000267551
0.9	1.31848	-0.505721	-0.505456	0.000265362
0.95	1.31458	-0.450184	-0.449921	0.00026212
1	1.30956	-0.39779	-0.397532	0.000257939
Rata-rata error = 0.000201003				

5.5. Pemakaian Differensiasi Untuk Menentukan Titik Puncak Kurva

Salah satu pemakaian differensial yang paling banyak dibicarakan adalah penentukan titik puncak kurva, dimana titik puncak (tertinggi atau terendah) diperoleh dengan memanfaatkan nilai differensial dari kurva pada setiap titik yang ditinjau.

Perhatikan kurva y = f(x) seperti gambar berikut :



Kurva tersebut mempunyai 7 titik puncak, yaitu $p_{1,}p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ dan p_7.Titik puncak p_1, p_3, p_5 dan p_7 dinamakan titik puncak maksimum.Titik puncak p_2, p_4 dan p_6 dinamakan titik puncak minimum.

Untuk menentukan titik puncak perhatikan definisi berikut :

Definisi 5.1.
Suatu titik a pada kurva y = f(x) dinamakan titik puncak bila dan hanya bila : $f^{l}(a) = 0$.
Definisi 5.2.
Sebuah titik puncak a dikatakan titik maksimum pada kurva y = f(x) bila : $f^{l1}(a) < 0$.
Definisi 5.3.
Sebuah titik puncak a dikatakan titik minimum pada kurva y = F(x) bila : $f^{l1}(a) > 0$.

Dari definisi-definisi di atas, maka untuk menentukan titik puncak kurva y = f(x) secara numerik adalah menentukan titik-titik dimana $f'(x) = 0$, kemudian dihitung apakah f'(x)>0 atau $f''(x)<0$ untuk menentukan apakah titik tersebut titik puncak maksimal atau titik puncak minimal.

Contoh 5.5.
Tentukan titik-titik puncak dari kurva $y = x^3-2x^2-x$ dengan mengambil range $[-1,1]$

x	f(x)	f'(x)	f"(x)
-1	-1.28736	3.75537	-2.93548
-0.95	-1.10326	3.60682	-3.00637
-0.9	-0.926673	3.45525	-3.05622
-0.85	-0.757731	3.30168	-3.08679
-0.8	-0.596505	3.14702	-3.09977
-0.75	-0.443029	2.9921	-3.09677

x	f(x)	f'(x)	f"(x)
-0.7	-0.297295	2.8377	-3.07932
-0.65	-0.159259	2.68449	-3.0489
-0.6	-0.0288457	2.5331	-3.00686
-0.55	0.0940508	2.38407	-2.95453
-0.5	0.209561	2.23787	-2.89312
-0.45	0.317838	2.09495	-2.8238
-0.4	0.419056	1.95567	-2.74764
-0.35	0.513405	1.82033	-2.66566
-0.3	0.601089	1.68922	-2.57881
-0.25	0.682327	1.56255	-2.48795
-0.2	0.757345	1.44051	-2.39391
-0.15	0.826378	1.32322	-2.29743
-0.1	0.889667	1.21081	-2.19921
-0.05	0.947458	1.10333	-2.09987
0	1	1.00083	-2
0.05	1.04754	0.90333	-1.90012
0.1	1.09033	0.810809	-1.80071
0.15	1.12862	0.723237	-1.70219
0.2	1.16266	0.640558	-1.60496
0.25	1.19268	0.562701	-1.50934
0.3	1.21893	0.489576	-1.41564
0.35	1.24164	0.421082	-1.32413
0.4	1.26103	0.357103	-1.23503
0.45	1.27735	0.297514	-1.14853
0.5	1.29079	0.24218	-1.0648
0.55	1.30156	0.190961	-0.983979
0.6	1.30988	0.143707	-0.906166
0.65	1.31594	0.100267	-0.831448
0.7	1.31991	0.0604834	-0.759885
0.75	**1.32198**	**0.0241983**	**-0.691519**
0.8	**1.32233**	**-0.008748**	**-0.62637**
0.85	1.32111	-0.038519	-0.564441
0.9	1.31848	-0.0652732	-0.505721
0.95	1.31458	-0.0891708	-0.450184
1	1.30956	-0.11037	-0.39779

Terlihat bahwa nilai puncak terjadi antara 0.75 dan 0.8, karena nilai f'(x) mendekati nol. Pada nilai tersebut terlihat nilai f"(x)<0 maka nilai puncak tersebut adalah nilai puncak maksimum.

5.6. Tugas

1. Tentukan titik maksimal dan titik minimal dari fungsi :

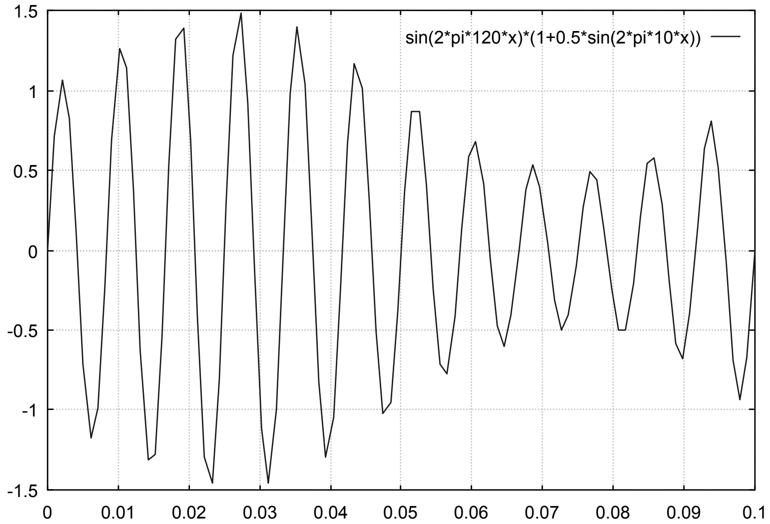
   $$f(x) = \frac{e^{-x}}{2+\sin(2x)}$$

   pada range [1,10] dengan h=0.1 dan h=0.01

2. Tentukan differensial pertama dari sinyal AM dengan frekwensi informasi 10 Hz dan frekwensi pembawa 120 Hz pada range [0,0.1] dengan h=0.001
   Fungsi sinyal AM dengan frekwensi informasi f dan frekwensi pembawa f_s adalah :

$$y(t) = \sin(2\pi f_s t)\{1 + a\sin(2\pi f t)\}$$

dimana a adalah konstanta modulasi, untuk soal ini a=0.5



3. Tentukan titik-titik puncak pada sinyal AM di atas, bedakan antara titik puncak maksimal dan titik puncak minimal. Hitung berapa jumlah titik puncak maksimal dan titik puncak minimal.
   Untuk titik puncak maksimal, bandingkan hasilnya dengan fungsi :
   $$y(t) = 1 + 0.5\sin(2\pi f t)$$
   dimana f adalah frekwensi sinyal informasi