Bab 4
Penyelesaian Persamaan Linier Simultan

4.1. Persamaan Linier Simultan

Persamaan linier simultan adalah suatu bentuk persamaan-persamaan yang secara bersama-sama menyajikan banyak variabel bebas. Bentuk persamaan linier simultan dengan *m* persamaan dan *n* variabel bebas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

dimana:

a_{ij} untuk i=1 s/d m dan j=1 s/d n adalah koefisien atau persamaan simultan

x_i untuk i=1 s/d n adalah variabel bebas pada persamaan simultan

Penyelesaian persamaan linier simultan adalah penentuan nilai x_i untuk semua i=1 s/d n yang memenuhi semua persamaan yang diberikan.

Permasalahan persamaan linier simultan merupakan permasalahan yang banyak muncul ketika berhubungan dengan permasalahan *multi-variabel* dimana setiap persamaan merupakan bentuk persamaan linier atau dengan kata lain setiap variabel berpangkat paling besar satu. Persamaan linier simultan di atas dapat dinyatakan sebagai bentuk matrik yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau dapat dituliskan:

A x = B

Dimana: $A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mi} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} danB = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$

Matrik **A** dinamakan dengan Matrik Koefisien dari persamaan linier simultan, atau ada yang menamakan dengan matrik Jacobian. Vektor **x** dinamakan dengan vektor variabel (atau vektor keadaan) dan vektor **B** dinamakan dengan vektor konstanta.

Augmented Matrix (matrik perluasan) dari persamaan linier simultan adalah matrik yang merupakan perluasan matrik A dengan menambahkan vector B pada kolom terakhirnya, dan dituliskan:

Augmented (A) = [A B]

Sehingga secara detail, augmented matrik dari persamaan linier simultan dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Contoh permasalahan multi variabel adalah sebagai berikut :

Contoh permasalahan 1:

Seorang pembuat boneka ingin membuat dua macam boneka yaitu boneka A dan boneka B. Kedua boneka tersebut dibuat dengan menggunakan dua macam bahan yaitu potongan kain dan kancing. Boneka A membutuhkan 10 potongan kain dan 6 kancing, sedangkan boneka B membutuhkan 8 potongan kain dan 8 kancing. **Permasalahannya adalah berapa buah boneka A dan boneka B yang dapat dibuat dari 82 potongan kain dan 62 kancing ?**

Permasalahan ini dapat dimodelkan dengan menyatakan :

x = jumlah boneka A
y = jumlah boneka B

Untuk setiap bahan dapat dinyatakan bahwa:

Potongan kain → 10 untuk boneka A + 8 untuk boneka B = 82
Kancing → 6 untuk boneka A + 8 untuk boneka B = 62

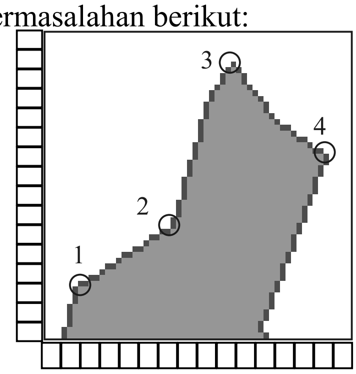
Atau dapat dituliskan dengan :

$10\,x + 8\,y = 82$
$6\,x + 8\,y = 62$

Penyelesaian dari permasalahan di atas adalah penentuan nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan di atas.

Contoh permasalahan 2:

Perhatikan potongan peta yang sudah diperbesar (*zoom*) sebagai berikut :
Sebagai contoh perhatikan permasalahan berikut:



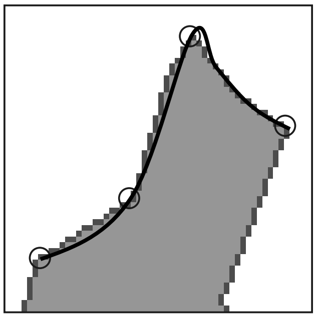
Perhatikan bahwa pada ke-4 titik tersebut dihubungkan dengan garis lurus, sehingga tampak kasar. Untuk menghaluskannya dilakukan pendekatan garis dengan kurva yang dibentuk dengan fungsi pendekatan polinomial. Dari fungsi polinomial yang dihasilkan kurva dapat digambarkan dengan lebih halus.
Misalkan pada contoh diatas, 4 titik yang ditunjuk adalah (2,3), (7,6), (8,14) dan (12,10). 4 titik ini dapat didekati dengan fungsi polinom pangkat 3 yaitu :

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Bila nilai x dan y dari 4 titik dimasukkan ke dalam persamaan di atas akan diperoleh model persamaan simultan sebagai berikut :

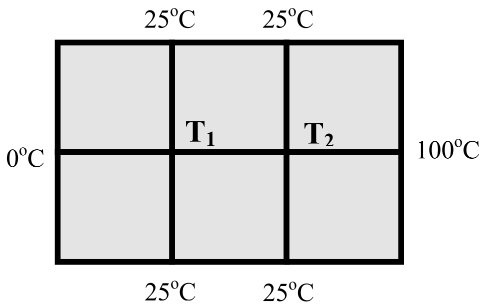
Titik 1 → $3 = 8\,a + 4\,b + 2\,c + d$
Titik 2 → $6 = 343\,a + 49\,b + 7\,c + d$
Titik 3 → $14 = 512\,a + 64\,b + 8\,c + d$
Titik 4 → $10 = 1728\,a + 144\,b + 12\,c + d$

Nilai a, b, c dan d adalah penyelesaian dari permasalahan di atas. Setelah nilai a, b, c dan d diperoleh maka persamaan polinomialnya didapatkan dan dengan menggunakan step x yang lebih kecil dapat digambarkan grafiknya dengan lebih halus.
Contoh hasilnya adalah sebagai berikut :



Permasalahan ini merupakan permasalahan **kurva fitting**, yang digunakan untuk menentukan persamaan polinomial yang paling sesuai untuk menyatakan fungsi dari data.

Contoh permasalahan 3 :
Diketahui panas beberapa titik pada plat baja yaitu pada sisi luar. Bila ditentukan bahwa aliran panas bergerak secara laminar dan panas pada sebuah titik adalah rata-rata panans dari 4 titik tetangganya, maka dapat dihitung panas pada titik T_1 dan T_2 sebagai berikut:



Persamaan panas pada titik T_1 dan T_2 dapat dihitung dengan:

$$T_1 = \tfrac{1}{4}\left(25 + 0 + 25 + T_2\right)$$
$$T_2 = \tfrac{1}{4}\left(25 + T_1 + 25 + 100\right)$$

Persamaan linier simultan dari permasalahan di atas adalah:

$$\boxed{\begin{aligned} 4T_1 - T_2 &= 50 \\ -T_1 + 4T_2 &= 150 \end{aligned}}$$

Penyelesaian permasalahan di atas adalah nilai T_1 dan T_2 yang memenuhi kedua persamaan di atas.

Theorema 4.1.
Suatu persamaan linier simultan mempunyai penyelesaian tunggal bila memenuhi syarat-syarat sebagai berikut.

(1) Ukuran persamaan linier simultan bujursangkar, dimana jumlah persamaan sama dengan jumlah variable bebas.
(2) Persamaan linier simultan non-homogen dimana minimal ada satu nilai vector konstanta B tidak nol atau ada $b_n \neq 0$.
(3) Determinan dari matrik koefisien persamaan linier simultan tidak sama dengan nol.

Untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan persamaan linier simultan dapat dilakukan dengan menggunakan metode-metode analitik seperti pemakaian metode grafis, aturan Crammer, atau invers matrik. Metode-metode tersebut dapat dilakukan dengan mudah bila jumlah variabel dan jumlah persamaannya di bawah 4, tetapi bila ukurannya besar maka metode-metode di atsa menjadi sulit dilakukan, sehingga pemakaian metode numerik menjadi suatu alternatif yang banyak digunakan. Metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan persamaan linier simultan antara lain:

(1) Metode Eliminasi Gauss
(2) Metode Eliminasi Gauss-Jordan
(3) Metode Iterasi Gauss-Seidel

4.2. Metode Eliminasi Gauss

Metode Eliminasi Gauss merupakan metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variable sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variable bebas. Cara eliminasi ini sudah banyak dikenal. Untuk menggunakan metode eliminasi Gauss ini, terlebih dahulu bentuk matrik diubah menjadi augmented matrik sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Metode eliminasi gauss, adalah suatu metode dimana bentuk matrik di atas, pada biagan kiri diubah menjadi matrik segitiga atas atau segitiga bawah dengan menggunakan **OBE** (**Operasi Baris Elementer**).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

Sehingga penyelesaian dapat diperoleh dengan:

$$x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(-c_{n-1,n}x_n + d_{n-1}\right)$$

....

$$x_2 = \frac{1}{c_{22}}\left(d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \dots - c_{2n}x_n\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{c_{11}}\left(d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x3 - \dots - c_{1n}x_n\right)$$

Operasi Baris Elementer (OBE) merupakan suatu operasional pengubahan nilai elemen matrik berdasarkan barisnya, tanpa mengubah matriknya. OBE pada baris ke-i+k dengan dasar baris ke i dapat dituliskan dengan :

$$a_{i+k,j} = a_{i+k,j} - c.a_{i,j}$$

dimana c adalah konstanta pengali yang diambil dari perbandingan nilai dari elemen $a_{i,i}$ dan $a_{i+k,i}$

Contoh 4.1:
Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$$

<u>Jawab:</u>
Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi baris elementer sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} \\ B_2 - B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ B_3 + B_2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

dengan demikian diperoleh penyelesaian:

$$x_3 = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{1}\left(-4-(2)3\right) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{1}\left(6-2-3\right) = 1$$

Algoritma Metode Eliminasi Gauss adalah sebagai berikut:

(1) Masukkan matrik A, dan vektor B beserta ukurannya n

(2) Buat augmented matrik [A|B] namakan dengan A

(3) Untuk baris ke i dimana i=1 s/d n, perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol :

Bila ya :

pertukarkan baris ke i dan baris ke i+k≤n, dimana $a_{i+k,i}$ tidak sama dengan nol, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.

Bila tidak : lanjutkan

(4) Untuk baris ke j, dimana j = i+1 s/d n

Lakukan operasi baris elementer:

- Hitung $c = \frac{a_{j,i}}{a_{i,i}}$
- Untuk kolom k dimana k=1 s/d n+1
  hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$

(5) Hitung akar, untuk i = n s/d 1 (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama)

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \ldots - a_{i,n}x_n\right)$$

dimana nilai i+k≤n

<u>*Catatan:*</u>

Metode eliminasi gauss ini sebenarnya merupakan metode elimniasi yang sering digunakan dalam perhitungan manual, hanya saja tekniknya menggunakan model penulisan persamaan bukan menggunakan augmented matrik.

4.3. Metode Eliminasi Gauss Jordan

Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss, hanya saja augmented matrik, pada sebelah kiri diubah menjadi matrik diagonal sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & d_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dari persamaan linier simultan diatas adalah nilai $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ dan atau:

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, x_3 = d_3, \ldots, x_n = d_n$$

Teknik yang digunakan dalam metode eliminasi Gauss-Jordan ini sama seperti metode eliminasi Gauss yaitu menggunakan OBE (Operasi Baris Elementer). Hanya perhitungan penyelesaian secara langsung diperoleh dari nilai pada kolom terakhir dari setiap baris.

Contoh 4.2 :

Selesaikan persamaan linier simultan:

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$2x_1 + 4x_2 = 8$$

Jawab:

Augmented matrik dari persamaan linier simultan tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Lakukan operasi baris elementer sebagai berikut:

$$B_2 - 2b_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B2/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 - B_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan linier simultan tersebut adalah:

$x_1 = 2$ dan $x_2 = 1$

Algoritma Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah sebagai berikut:

(1) Masukkan matrik A, dan vektor B beserta ukurannya n

(2) Buat augmented matrik [A|B] namakan dengan A

(4) Untuk baris ke i dimana i=1 s/d n

(a) Perhatikan apakah nilai $a_{i,i}$ sama dengan nol :

Bila ya :

pertukarkan baris ke i dan baris ke i+k≤n, dimana $a_{i+k,i}$ tidak sama dengan nol, bila tidak ada berarti perhitungan tidak bisa dilanjutkan dan proses dihentikan dengan tanpa penyelesaian.

Bila tidak : lanjutkan

(b) Jadikan nilai diagonalnya menjadi satu, dengan cara untuk setiap kolom k dimana k=1 s/d n+1, hitung $a_{i,k} = \dfrac{a_{i,k}}{a_{i,i}}$

(6) Untuk baris ke j, dimana j = i+1 s/d n

Lakukan operasi baris elementer: untuk kolom k dimana k=1 s/d n

Hitung $c = a_{j,i}$

Hitung $a_{j,k} = a_{j,k} - c.a_{i,k}$

(7) Penyelesaian, untuk i = n s/d 1 (bergerak dari baris ke n sampai baris pertama)

$x_i = a_{i,n+1}$

4.4. Metode Iterasi Gauss-Seidel

Metode interasi Gauss-Seidel adalah metode yang menggunakan proses iterasi hingga diperoleh nilai-nilai yang berubah. Bila diketahui persamaan linier simultan:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & a_{13} & x_3 & + & \ldots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\
a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & a_{23} & x_3 & + & \ldots & + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\
a_{31} & x_1 & + & a_{32} & x_2 & + & a_{33} & x_3 & + & \ldots & + & a_{3n} & x_n & = & b_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & x_1 & + & a_{n2} & x_2 & + & a_{n3} & x_3 & + & \ldots & + & a_{nn} & x_n & = & b_n
\end{array}$$

Berikan nilai awal dari setiap x_i (i=1 s/d n) kemudian persamaan linier simultan diatas dituliskan menjadi:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots . - a_{1n}x_n\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{2^2}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots . - a_{2n}x_n\right)$$

....

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots . - a_{nn-1}x_{n-1}\right)$$

Dengan menghitung nilai-nilai x_i (i=1 s/d n) menggunakan persamaan-persamaan di atas secara terus-menerus hingga nilai untuk setiap x_i (i=1 s/d n) sudah sama dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya maka diperoleh penyelesaian dari persamaan linier simultan tersebut. Atau dengan kata lain proses iterasi dihentikan bila selisih nilai x_i (i=1 s/d n) dengan nilai x_i pada iterasi sebelumnya kurang dari nilai tolerasi error yang ditentukan.

Catatan:

Hati-hati dalam menyusun sistem persamaan linier ketika menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel ini. Perhatikan setiap koefisien dari masing-masing x_i pada semua persamaan di diagonal utama (a_{ii}). Letakkan nilai-nilai terbesar dari koefisien untuk setiap x_i pada diagonal utama. Masalah ini adalah '**masalah pivoting**' yang harus benar-

benar diperhatikan, karena penyusun yang salah akan menyebabkan iterasi menjadi divergen dan tidak diperoleh hasil yang benar.

<u>Contoh 4.3:</u>
Selesaikan sistem persamaan linier:

$$x_1 + x_2 = 5$$
$$2x_1 + 4x_2 = 14$$

<u>Jawab:</u>
Berikan nilai awal : $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$
Susun persamaan menjadi:

$$x_1 = 5 - x_2$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2x_1)$$

iterasi 1 :
$$x_1 = 5 - 0 = 5$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2.5) = 1$$

iterasi 2 :
$$x_1 = 5 - 1 = 4$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(14 - 2.4) = \frac{3}{2}$$

iterasi 3 :
$$x_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

iterasi 4 :
$$x_1 = 5 - \frac{7}{4} = \frac{13}{4}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{13}{4}\right) = \frac{15}{8}$$

iterasi 5 :
$$x_1 = 5 - \frac{15}{8} = \frac{25}{5}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{25}{8}\right) = \frac{31}{16}$$

iterasi 6 :
$$x_1 = 5 - \frac{31}{16} = \frac{49}{16}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{49}{16}\right) = \frac{63}{32}$$

iterasi 7 :
$$x_1 = 5 - \frac{63}{32} = \frac{97}{32}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - 2.\frac{97}{32}\right) = \frac{127}{64}$$

Nilai interasi ke-7 sudah tidak berbeda jauh dengan nilai interasi ke-6 maka proses dihentikan dan diperoleh penyelesaian:

$$x_1 = \frac{97}{32} \text{ dan } x_2 = \frac{127}{64}$$

Algoritma Metode Iterasi Gauss-Seidel adalah sebagai berikut:

(1) Masukkan matrik **A**, dan vektor **B** beserta ukurannya *n*
(2) Tentukan batas maksimum iterasi *max_iter*
(3) Tentukan toleransi error ε
(4) Tentukan nilai awal dari x_i, untuk i=1 s/d n
(5) Simpan x_i dalam s_i, untuk i=1 s/d n
(6) Untuk i=1 s/d n hitung :

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j\right)$$

$$e_i = |x_i - s_i|$$

(7) iterasi ← iterasi+1
(8) Bila iterasi lebih dari max_iter atau tidak terdapat $e_i<\varepsilon$ untuk i=1 s/d n maka proses dihentikan dari penyelesaiannya adalah x_i untuk i=1 s/d n. Bila tidak maka ulangi langkah (5)

4.5. Contoh Penyelesaian Permasalahan Persamaan Linier Simultan

```
Contoh Kasus 1:
Permasalahan penentuan produk berdasarkan persediaan bahan
```

Mr.X membuat 2 macam boneka A dan B. Boneka A memerlukan bahan 10 blok B1 dan 2 blok B2, sedangkan boneka B memerlukan bahan 5 blok B1 dan 6 blok B2. Berapa jumlah boneka yang dapat dihasilkan bila tersedia 80 blok bahan B1 dan 36 blok bahan B2.

Model Sistem Persamaan Linier :

Variabel yang dicari adalah jumlah boneka, anggap:

x_1 adalah jumlah boneka A
x_2 adalah jumlah boneka B

Perhatikan dari pemakaian bahan :

B1: 10 bahan untuk boneka A + 5 bahan untuk boneka B = 80
B2: 2 bahan untuk boneka A + 6 bahan untuk boneka B = 36
Diperoleh model sistem persamaan linier

$$10\,x_1 + 5\,x_2 = 80$$
$$2\,x_1 + 6\,x_2 = 36$$

Penyelesaian dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan adalah sebagai berikut:

Augemented Matrik	10	5	80

2	6	36

B1 <-- B1/10

1	0,5	8
2	6	36

B2 <-- B2 - 2 B1

1	0,5	8
0	5	20

B2 <-- B2/5

1	0,5	8
0	1	4

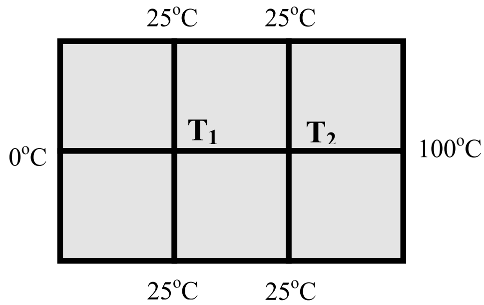
B1 <-- B1 - 0,5 B2

1	0	6
0	1	4

Diperoleh $x_1 = 6$ dan $x_2 = 4$, artinya bahan yang tersedia dapat dibuat 6 boneka A dan 4 boneka B.

Contoh Kasus 2:
Permasalahan aliran panas pada plat baja

Diketahui panas beberapa titik pada plat baja yaitu pada sisi luar. Bila ditentukan bahwa aliran panas bergerak secara laminar dan panas pada sebuah titik adalah rata-rata panans dari 4 titik tetangganya, maka dapat dihitung panas pada titik T_1 dan T_2 sebagai berikut:



Persamaan panas pada titik T_1 dan T_2 dapat dihitung dengan:

$$T_1 = \tfrac{1}{4}\left(25 + 0 + 25 + T_2\right)$$
$$T_2 = \tfrac{1}{4}\left(25 + T_1 + 25 + 100\right)$$

Sistem persamaan linier dari permasalahan di atas adalah:

$$\boxed{\begin{aligned} 4T_1 - T_2 &= 50 \\ -T_1 + 4T_2 &= 150 \end{aligned}}$$

Penyelesaian dengan menggunakan iterasi Gauss-Seidel, terlebih dahulu ditentukan nilai pendekatan awal $T_1=0$ dan $T_2=0$ dan fungsi pengubahnya adalah :

$$T_1 = \frac{1}{4}\left(50 + T_2\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{4}\left(150 + T_1\right)$$

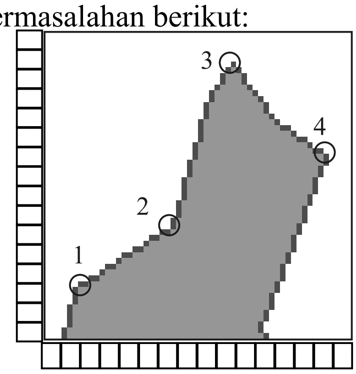
Diperoleh hasil perhitungan untuk toleransi error 0.0001 sebagai berikut:

Iterasi	x1	x2	e1	e2
0	0	0	-	-
1	12,5	40,625	12,5	40,625
2	22,65625	43,16406	10,15625	2,539063
3	23,29102	43,32275	0,634766	0,158691
4	23,33069	43,33267	0,039673	0,009918
5	23,33317	43,33329	0,00248	0,00062
6	23,33332	43,33333	0,000155	3,87E-05
7	23,33333	43,33333	9,69E-06	2,42E-06

Jadi temperatur pada T_1=23,3333 dan T_2=43,3333

Contoh Kasus 3:
Penghalusan Kurva Dengan Fungsi Pendekatan Polinomial

Perhatikan potongan peta yang sudah diperbesar (*zoom*) sebagai berikut :
Sebagai contoh perhatikan permasalahan berikut:



Perhatikan bahwa pada ke-4 titik tersebut dihubungkan dengan garis lurus, sehingga tampak kasar. Untuk menghaluskannya dilakukan pendekatan garis dengan kurva yang dibentuk dengan fungsi pendekatan polinomial. Dari fungsi polinomial yang dihasilkan kurva dapat digambarkan dengan lebih halus.
Misalkan pada contoh diatas, 4 titik yang ditunjuk adalah (2,3), (7,6), (8,14) dan (12,10). 4 titik ini dapat didekati dengan fungsi polinom pangkat 3 yaitu :

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Bila nilai x dan y dari 4 titik dimasukkan ke dalam persamaan di atas akan diperoleh model persamaan simultan sebagai berikut :

Titik 1 → 3 = 8 a + 4 b + 2 c + d
Titik 2 → 6 = 343 a + 49 b + 7 c + d
Titik 3 → 14 = 512 a + 64 b + 8 c + d
Titik 4 → 10 = 1728 a + 144 b + 12 c + d

Dengan menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan diperoleh :

Augmented Matrik	------>	8	4	2	1	3
		343	49	7	1	6
		512	64	8	1	14
		1728	144	12	1	10
B1 = B1/8	------>	1	0,5	0,25	0,125	0,375

B2 = B2 - 343 B1	0	-122,5	-78,75	-41,88	-122,6
B3 = B3 - 512 B1	0	-192	-120	-63	-178
B4 = B4 - 1728 B1	0	-720	-420	-215	-638

B2 = B2/(-122,5)	------>	1	0	-0,071	-0,046	-0,126
B1 = B1 - 0,5 B2		0	1	0,6429	0,3418	1,001
B3 = B3 + 192 B2		0	0	3,4286	2,6327	14,196
B4 = B4 + 720 B2		0	0	42,857	31,122	82,735

B3 = B3/3,4286	------>	1	0	0	0,0089	0,1702
B1 = B1 + 0,071 B3		0	1	0	-0,152	-1,661
B2 = B2 - 0,6429 B3		0	0	1	0,7679	4,1405
B4 = B4 - 42,857 B3		0	0	0	-1,786	-94,71

B4 = B4/(-1,786)	------>	1	0	0	0	-0,303
B1 = B1 - 0,0089 B4		0	1	0	0	6,39
B2 = B2 + 0,152 B4		0	0	1	0	-36,59
B3 = B3 + 0,7679 B4		0	0	0	1	53,04

Dengan demikian diperoleh :

$a = -0,303$

$b = 6,39$

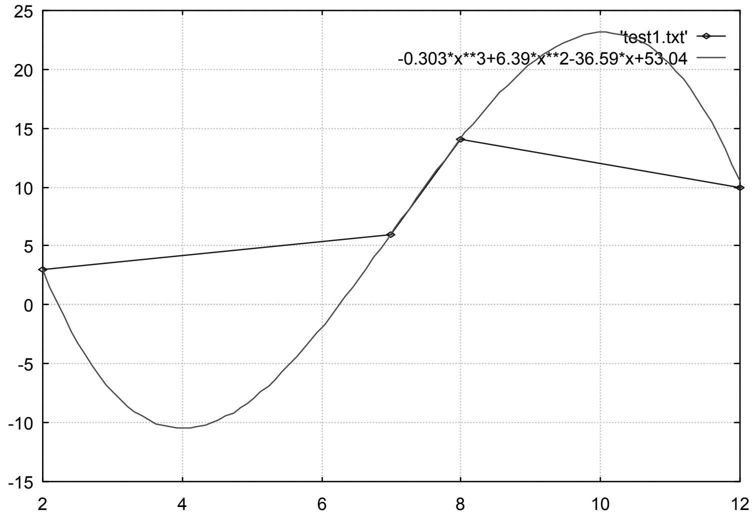
$c = -36,59$

$d = 53,04$

dan persamaan polinomial yang diperoleh :

$y = -0,303\, x^3 + 6,39\, x^2 - 36,59\, x + 53,04$

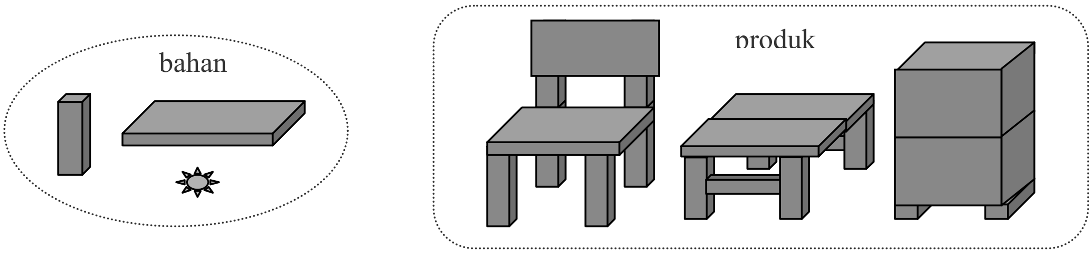
Hasil penghalusan kurva adalah sebagai berikut:



Hasilnya memang belum tampak bagus, hal ini disebabkan pengambilan titiknya yang terlalu jauh dan tingkat polinomial yang belum memenuhi syarat terbaiknya. Hanya saja kurva tersebut benar-benar melewati 4 titik yang ditentukan.

4.6. TUGAS

(1) Sebuah industri garmen membuat tiga macam produk yaitu kursi, meja dan lemari. Produk-produk tersebut membutuhkan tiga jenis bahan yaitu kayu papan, kayu ring dan paku penguat. Perhatikan contoh produknya sebagai berikut :



Spesifikasi produk:

- ◈ 1 kursi membutuhkan 2 kayu papan, 6 ring dan 10 paku.
- ◈ 1 meja membutuhkan 2 kayu papan, 6 ring dan 12 paku
- ◈ 1 lemari membutuhkan 10 kayu papan, 10 ring dan 20 paku

Berapa jumlah meja, kursi dan lemari yang dapat dibuat bila tersedia 108 kayu papan, 204 kayu ring dan 376 paku ?

(2) Seorang petani ingin menanam padi, jagung dan ketela di atas tanahnya seluas 12 hektare. Dengan ketentuan:

- ◈ Untuk setiap hektare padi membutuhkan 10 kg pupuk urea dan 6 kg pestisida.
- ◈ Untuk setiap hektare jagung membutuhkan 8 kg pupuk urea dan 4 kg pestisida
- ◈ Untuk setiap hektare ketela pohon membutuhkan 5 kg pupuk urea dan 3 kg pestisida

Berapa hektare padi, jagung dan ketela yang harus ditanam bila tersedia 97 kg pupuk uera dan 55 kg pestisida ?

(3) Temperatur Pada Plat Baja

- ◈ Plat diletakkan pada temperatur ruang 25^{o}C dengan komposisi seperti gambar di samping.
- ◈ Temperatur pada setiap titik dipengaruhi oleh 8 titik sekitarnya dari arah atas, bawah, kiri, kanan, dan diagonal.

Berapa temperatur pada titik hijau bila lingkaran hitam adalah temperatur ruang