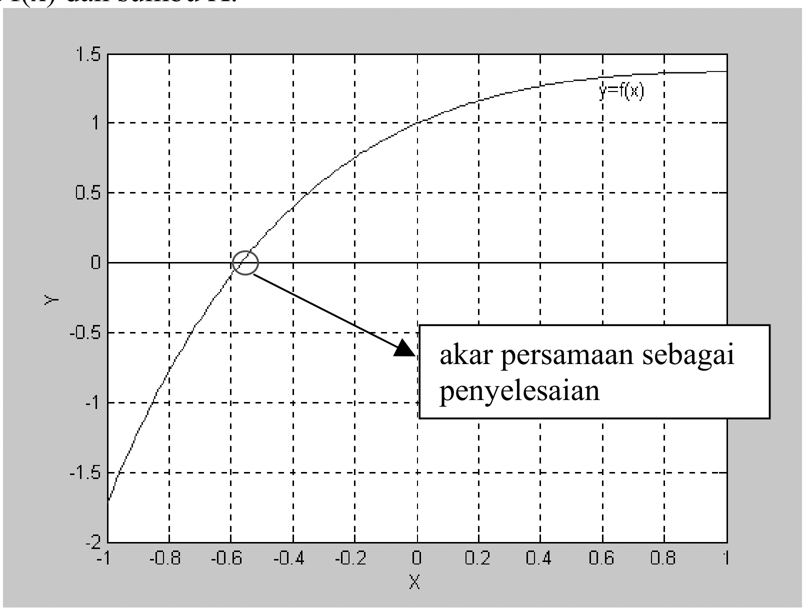
BAB 3
PENYELESAIAN PERSAMAAN NON LINIER

3.1. Permasalahan Persamaan Non Linier

Penyelesaian persamaan non linier adalah penentuan akar-akar persamaan non linier.Dimana akar sebuah persamaan f(x) =0 adalah nilai-nilai x yang menyebabkan nilai f(x) sama dengan nol. Dengan kata lain akar persamaan f(x) adalah titik potong antara kurva f(x) dan sumbu X.



Gambar 3.1. Penyelesaian persamaan non linier

Penyelesaian persamaan linier $mx + c = 0$ dimana m dan c adalah konstanta, dapat dihitung dengan :

$$mx + c = 0$$

$$x = -\frac{c}{m}$$

Penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dihitung dengan menggunakan rumus ABC.

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

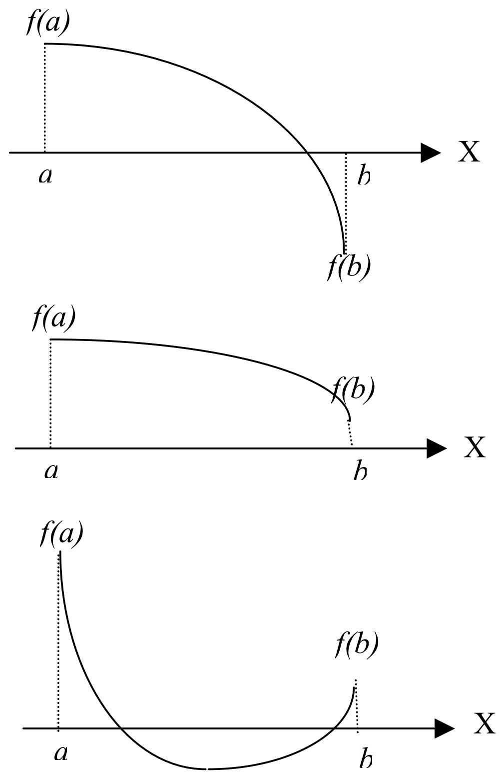
Beberapa persamaan polynomial yang sederhana dapat diselesaikan theorema sisa.Sehingga tidak memerlukan metode numeric dalam menyelesaikannya, karena metode analitik dapat dilakukan.Tetapi bagaimana menyelesaikan persamaan

$$x - e^{-x} = 0$$

Tampaknya sederhana, tetapi untuk menyelesaikan persamaan non linier merupakan metode pencarian akar secara berulang-ulang.

Theorema 3.1.
Suatu range *x=[a,b]* mempunyai akar bila *f(a) dan f(b)* berlawanan tanda atau memenuhi *f(a).f(b)<0*

Theorema di atas dapat dijelaskan dengan grafik-grafik sebagai berikut:



Karena *f(a).f(b)<0* maka pada range x=[a,b] terdapat akar.

Karena *f(a).f(b)>0* maka pada range x=[a,b] tidak dapat dikatakan terdapat akar.

Gambar 3. Penentuan akar persamaan

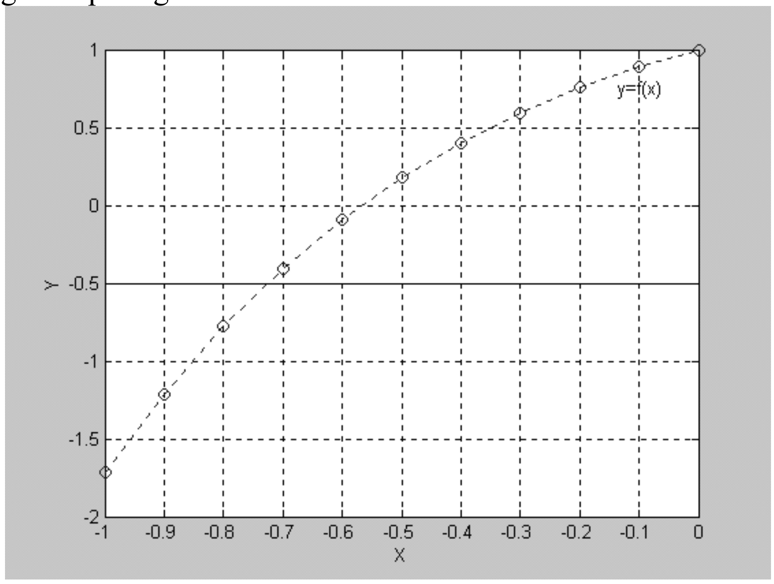
Secara sederhana, untuk menyelesaikan persamaan non linier dapat dilakukan dengan menggunakan metode table atau pembagian area.Dimana untuk x = $[a,b]$ atau x di antara *a* dan *b* dibagi sebanyak N bagian dan pada masing-masing bagian dihitung nilai *f(x)* sehingga diperoleh tabel :

X	f(x)
x_0=a	f(a)
x_1	f(x_1)
x_2	f(x_2)
x_3	f(x_3)
……	……
x_n=b	f(b)

Dari tabel ini, bila ditemukan $f(x_k)=0$ atau mendekati nol maka dikatakan bahwa x_k adalah penyelesaian persamaan $f(x_k)=0$.Bila tidak ada $f(x_k)$ yang sama dengan nol, maka dicari nilai $f(x_k)$ dan $f(x_{k+1})$ yang berlawanan tanda, bila tidak ditemukan maka dikatakan tidak mempunyai akar untuk x = $[a,b]$, dan bila ditemukan maka ada 2 pendapat untuk menentukan akar persamaan, yaitu :

1. Akar persamaan ditentukan oleh nilai mana yang lebih dekat, bila $|f(x_k)| \leq |f(x_{k+1})|$ maka akarnya x_k, dan bila $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$ maka akarnya x_{k+1}.
2. Akarnya perlu di cari lagi, dengan range x = $[x_k, x_{k+1}]$.

Secara grafis, metode table ini dapat dijelaskan untuk x = $[a,b]$, fungsi *f(x)* dibagi menjadi N bagian seperti gambar berikut :



Gambar 3.3. Metode Tabel

Gambar di atas menjelaskan bahwa penyelesaian diperoleh dengan membagi x = $[a,b]$ sebanyak-banyaknya hingga diperoleh suatu garis yang melalui akar persamaan dan nilai x dari garis tersebut adalah penyelesaian dari persamaan F(x) = 0.

Contoh 3.1:

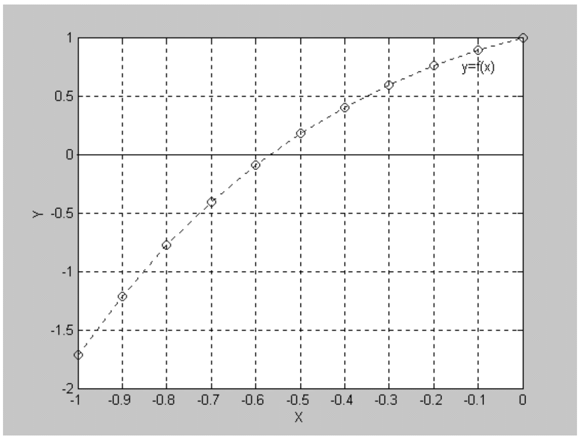
Selesaikan persamaan : $x+e^x = 0$ dengan range x = $[-1,0]$

Untuk mendapatkan penyelesaian dari persamaan di atas range x = $[-1,0]$ dibagi menjadi 10 bagian sehingga diperoleh :

X	f(x)
-1,0	-0,63212
-0,9	-0,49343
-0,8	-0,35067
-0,7	-0,20341
-0,6	-0,05119
-0,5	0,10653
-0,4	0,27032
-0,3	0,44082
-0,2	0,61873
-0,1	0,80484
0,0	1,00000

Dari table diperoleh penyelesaian berada di antara –0,6 dan –0,5 dengan nilai f(x) masing-masing -0,0512 dan 0,1065, sehingga dapat diambil keputusan penyelesaiannya di x = 0,6.Bila pada range x = $[-0{,}6,-0{,}5]$ dibagi 10 maka diperoleh f(x) terdekat dengan nol pada x = -0,57 dengan F(x) = 0,00447

Contoh 3. 2:
Selesaikan persamaan $xe^{-x} + 1 = 0$.
Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, hal pertama yang harus dilakukan adalah menaksir range yang tepat, dengan cara menggambarkan.



Dari gambar di atas terlihat bahwa akar persamaan berada pada range $[-0.6,-0.5]$.Dari range ini dibuat table dengan membagi range menjadi 10 bagian sehingga diperoleh :

x	f(x)
-0,60	-0,09327
-0,59	-0,06435
-0,58	-0,03590
-0,57	-0,00791
-0,56	0,01962
-0,55	0,04671
-0,54	0,07336
-0,53	0,09957
-0,52	0,12535
-0,51	0,15070
-0,50	0,17564

Dari table tersebut dapat dikatakan bahwa akar persamaan berada antara –0,57 dan –0,56, atau dengan menggunakan selisih terkecil maka dapat dikatakan bahwa akar persamaan terletak di x = -0,57 dengan F(x) = -0,00791.

Metode table ini secara umum sulit mendapatkan penyelesaian dengan error yang kecil, karena itu metode ini tidak digunakan dalam penyelesaian persamaan non linier, Tetapi metode ini digunakan sebagai taksiran awal mengetahui area penyelesaian yang benar sebelum menggunakan metode yang lebih baik dalam menentukan penyelesaian.

Algoritma Metode Tabel :

(1) Defisikan fungsi f(x)

(2) Tentukan range untuk x yang berupa batas bawah x_{bawah}dan batas atas x_{atas}.

(3) Tentukan jumlah pembagian N

(4) Hitung step pembagi h

$$H = \frac{x_{atas} - x_{bawah}}{N}$$

(5) Untuk i = 0 s/d N, hitung

$x_i = x_{bawah} + i.h$

$y_i = f(x_i)$

(6) Untuk I = 0 s/d N dicari k dimana

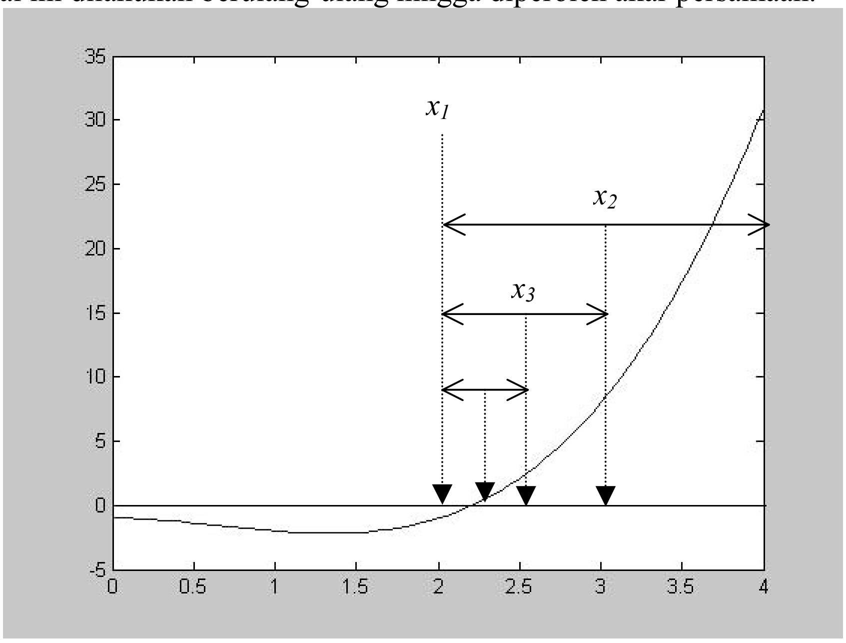
*. Bila $f(x_k) = 0$ maka x_k adalah penyelesaian

*. Bila $f(x_k).f(x_{k+1}) < 0$ maka :

- Bila $|f(x_k)| <|f(x_{k+1})$ maka x_k adalah penyelesaian
- Bila tidak x_{k+1}adalah penyelesaian atau dapat dikatakan penyelesaian berada di antara x_k dan x_{k+1}.

3.2. Metode Biseksi.

Ide awal metode ini adalah metode table, dimana area dibagi menjadi N bagian.Hanya saja metode biseksi ini membagi range menjadi 2 bagian, dari dua bagian ini dipilih bagian mana yang mengandung dan bagian yang tidak mengandung akar dibuang.Hal ini dilakukan berulang-ulang hingga diperoleh akar persamaan.



Gambar 3.4. Metode Biseksi

Untuk menggunakan metode biseksi, terlebih dahulu ditentukan batas bawah (*a*) dan batas atas (*b*).Kemudian dihitung nilai tengah :

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Dari nilai x ini perlu dilakukan pengecekan keberadaan akar. Secara matematik, suatu range terdapat akar persamaan bila f(a) dan f(b) berlawanan tanda atau dituliskan :

$$f(a)\ .\ f(b) < 0$$

Setelah diketahui dibagian mana terdapat akar, maka batas bawah dan batas atas di perbaharui sesuai dengan range dari bagian yang mempunyai akar.

Contoh 3. 3:

Selesaikan persamaan $xe^{-x}+1 = 0$, dengan menggunakan range x=$\left[-1,0\right]$, maka diperoleh tabel biseksi sebagai berikut :

iterasi	a	B	x	f(x)	f(a)	Keterangan
1	-1	0	-0,5	0,175639	-1,71828	berlawanan tanda
2	-1	-0,5	-0,75	-0,58775	-1,71828	
3	-0,75	-0,5	-0,625	-0,16765	-0,58775	
4	-0,625	-0,5	-0,5625	0,012782	-0,16765	berlawanan tanda
5	-0,625	-0,5625	-0,59375	-0,07514	-0,16765	
6	-0,59375	-0,5625	-0,57813	-0,03062	-0,07514	
7	-0,57813	-0,5625	-0,57031	-0,00878	-0,03062	
8	-0,57031	-0,5625	-0,56641	0,002035	-0,00878	berlawanan tanda
9	-0,57031	-0,56641	-0,56836	-0,00336	-0,00878	
10	-0,56836	-0,56641	-0,56738	-0,00066	-0,00336	

Dimana x = $\dfrac{a+b}{2}$

Pada iterasi ke 10 diperoleh x = -0.56738 dan f(x) = -0.00066

Untuk menghentikan iterasi, dapat dilakukan dengan menggunakan toleransi error atau iterasi maksimum.

Catatan : Dengan menggunakan metode biseksi dengan tolerasi error 0.001 dibutuhkan 10 iterasi, semakin teliti (kecil toleransi errorny) maka semakin bear jumlah iterasi yang dibutuhkan.

Algoritma Metode Biseksi

(1) Definisikan fungsi *f(x)* yang akan dicari akarnya

(2) Tentukan nilai *a* dan *b*

(3) Tentukan torelansi e dan iterasi maksimum *N*

(4) Hitung *f(a)* dan *f(b)*

(5) Jika *f(a).f(b)>0* maka proses dihentikan karena tidak ada akar, bila tidak dilanjutkan

(6) Hitung x= $\dfrac{a+b}{2}$

(7) Hitung *f(x)*

(8) Bila *f(x).f(a)<0* maka *b=x* dan *f(b)=f(x)*, bila tidak *a=x* dan *f(a)=f(x)*

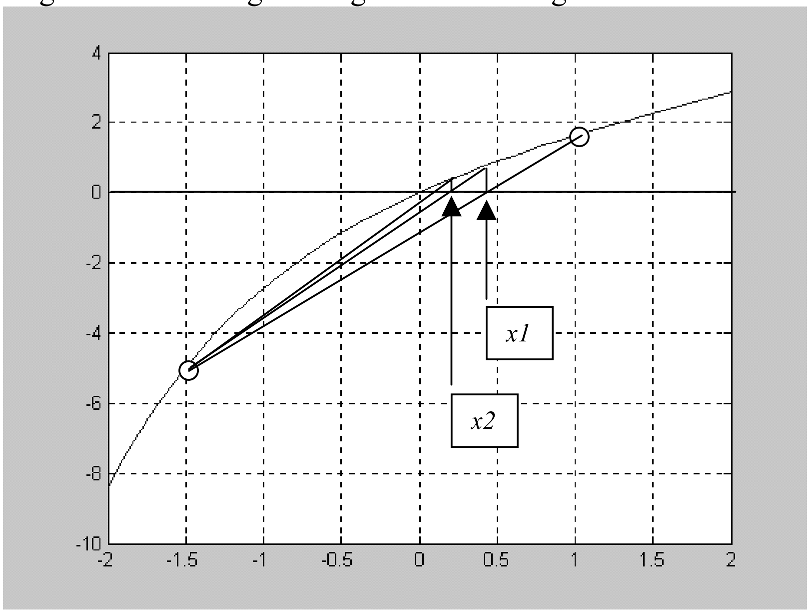
(9) Jika |b-a|<e atau iterasi>iterasi maksimum maka proses dihentikan dan didapatkan akar = x, dan bila tidak, ulangi langkah 6.

3.3. Metode Regula Falsi

Metode regula falsi adalah metode pencarian akar persamaan dengan memanfaatkan kemiringan dan selisih tinggi dari dua titik batas range. Seperti halnya metode biseksi, metode ini bekerja secara iterasi dengan melakukan update range.Titik pendekatan yang digunakan oleh metode regula-falsi adalah :

$$X = \frac{f(b).a - f(a).b}{f(b) - f(a)}$$

Dengan kata lain titik pendekatan x adalah nilai rata-rata range berdasarkan F(x).Metode regula falsi secara grafis digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.5. Metode Regula Falsi

Contoh 3. 4:

Selesaikan persamaan $xe^{-x}+1=0$ pada range $x=[-1,0]$, dengan metode regula-falsi diperoleh :

iterasi	a	b	x	f(x)	f(a)	f(b)
1	-1	0	-0,36788	0,468536	-1,71828	1
2	-1	-0,36788	0,074805	1,069413	-1,71828	0,468536
3	-1	0,074805	-0,42973	0,339579	-1,71828	1,069413
4	-1	-0,42973	0,1938	1,159657	-1,71828	0,339579
5	-1	0,1938	-0,51866	0,128778	-1,71828	1,159657
6	-1	-0,51866	0,412775	1,273179	-1,71828	0,128778
7	-1	0,412775	-0,6627	-0,28565	-1,71828	1,273179
8	-0,6627	0,412775	-0,6169	-0,14323	-0,28565	1,273179
9	-0,6169	0,412775	-0,59626	-0,0824	-0,14323	1,273179
10	-0,59626	0,412775	-0,58511	-0,05037	-0,0824	1,273179
11	-0,58511	0,412775	-0,57855	-0,03181	-0,05037	1,273179
12	-0,57855	0,412775	-0,57451	-0,02047	-0,03181	1,273179
13	-0,57451	0,412775	-0,57195	-0,01333	-0,02047	1,273179
14	-0,57195	0,412775	-0,5703	-0,00874	-0,01333	1,273179

iterasi	a	b	x	f(x)	f(a)	f(b)
15	-0,5703	0,412775	-0,56922	-0,00576	-0,00874	1,273179
16	-0,56922	0,412775	-0,56852	-0,00381	-0,00576	1,273179
17	-0,56852	0,412775	-0,56806	-0,00252	-0,00381	1,273179
18	-0,56806	0,412775	-0,56775	-0,00167	-0,00252	1,273179
19	-0,56775	0,412775	-0,56755	-0,00111	-0,00167	1,273179
20	-0,56755	0,412775	-0,56741	-0,00074	-0,00111	1,273179

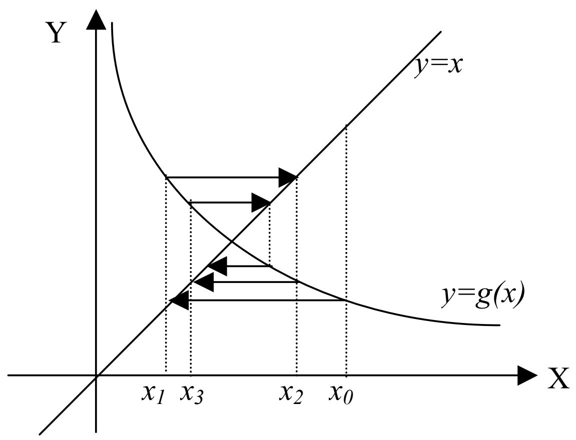
Akar persamaan diperoleh di x=-0.56741 dengan kesalahan =0,00074

Algoritma Metode Regula Falsi

1. definisikan fungsi f(x)
2. Tentukan batas bawah (a) dan batas atas (b)
3. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
4. Hitung Fa = f(a) dan Fb = f(b)
5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau error > e
    - $x = \dfrac{Fb.a - Fa.b}{Fb - Fa}$
    - Hitung Fx = f(x)
    - Hitung error = |Fx|
    - Jika Fx.Fa <0 maka b = x dan Fb = Fx jika tidak a = x dan Fa = Fx.
6. Akar persamaan adalah x.

3.4. Metode Iterasi Sederhana.

Metode iterasi sederhana adalah metode yang memisahkan x dengan sebagian x yang lain sehingga diperoleh : x = g(x). Sebagai contoh untuk menyelesaikan persamaan $x - e^x = 0$ maka persamaan di ubah menjadi : $x = e^x$ atau $g(x) = e^x$.
g(x) inilah yang menjadi dasar iterasi pada metode iterasi sederhana ini.Metode iterasi sederhana secara grafis dapat dijelaskan sebagai berikut :



Gambar 3.6. Metode Iterasi Sederhana

Contoh 3. 5:
Selesaikan $x + e^x = 0$, maka persamaan diubah menjadi $x = e^x$ atau $g(x) = e^x$.
Ambil titik awal di $x_0 = -1$, maka
Iterasi 1 : $x = -e^{-1} = -0.3679$ → F(x) = 0,3243
Iterasi 2 : $x = e^{-0,3679} = -0,6922$
F(x) = -0,19173
Iterasi 3 : $x = -e^{-0,6922} = -0,50047$
F(x) = 0,10577
Iterasi 4 : $x = -e^{-0,50047} = -0,60624$
F(x) = -0,06085
Iterasi 5 = $x = -e^{-0,60624} = -0,5454$
F(x) = 0,034217
Pada iterasi ke 10 diperoleh x = -0,56843 dan F(x) = 0,034217.

Algoritma Metode Iterasi Sederhana

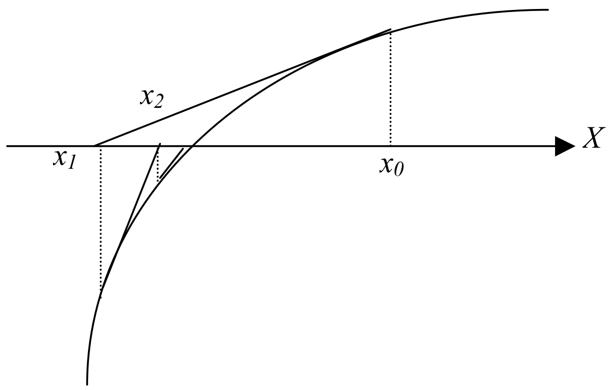
1. Definisikan F(x) dan g(x)
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Tentukan pendekatan awal $x[0]$
4. Untuk iterasi = 1 s/d n atau $F(x[iterasi]) \geq e$
   $X_i = g(x_{i-1})$
   Hitung $F(x_i)$
5. Akar adalah x terakhir yang diperoleh.

3.5. Metode Newton Raphson

Metode newton raphson adalah metode pendekatan yang menggunakan satu titik awal dan mendekatinya dengan memperhatikan slope atau gradien pada titik tersebut.Titik pendekatan ke n+1 dituliskan dengan :

$$X_{n+1} = x_n + \frac{F(x_n)}{F^1(x_n)}$$

Metode newton raphson dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar.3.6 Metode Newton Raphson.

Contoh 3. 6:
Selesaikan persamaan x - e^{-x} = 0 dengan titik pendekatan awal x_0 =0
f(x) = x - e^{-x} $\rightarrow$ f'(x)=1+e^{-x}
$f(x_0) = 0 - e^{-0} = -1$
$^{f1}(x_0) = 1 + e^{-0} = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^1(x_0)} = 0 - \frac{-1}{2} = 0{,}5$$

$f(x_1)$ = -0,106631 dan $f^1(x_1)$ = 1,60653

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^1(x_1)} = 0{,}5 - \frac{-0{,}106531}{1{,}60653} = 0{,}566311$$

$f(x_2)$ = -0,00130451 dan $f^1(x_2)$ = 1,56762

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f^1(x_2)} = 0{,}566311 - \frac{-0{,}00130451}{1{,}56762} = 0{,}567143$$

$f(x_3) = -1{,}96.10^{-7}$. Suatu bilangan yang sangat kecil.
Sehingga akar persamaan x = 0,567143.

Algoritma Metode Newton Raphson

1. Definisikan fungsi f(x) dan $f^1(x)$
2. Tentukan toleransi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Tentukan nilai pendekatan awal x_0
4. Hitung $f(x_0)$ dan $f^1(x_0)$
5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau $|f(x_i)| \geq e$

   $$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^1(x_i)}$$

   Hitung $f(x_i)$ dan $f^1(x_i)$
6. Akar persamaan adalah nilai x_i yang terakhir diperoleh.

Contoh 3. 7:
Hasil penyelesaian persamaan x - e^{-x} = 0 dengan titik pendekatan awal x_0 =0 dan toleransi error 0.00001 adalah:

Iterasi	**x**	**f(x)**	**f'(x)**
0	0	-1	2
1	0.5	-0.106531	1.60653
2	0.566311	-0.00130451	1.56762
3	0.567143	-1.9648e-007	1.56714
Akar terletak di x = 0.567143			

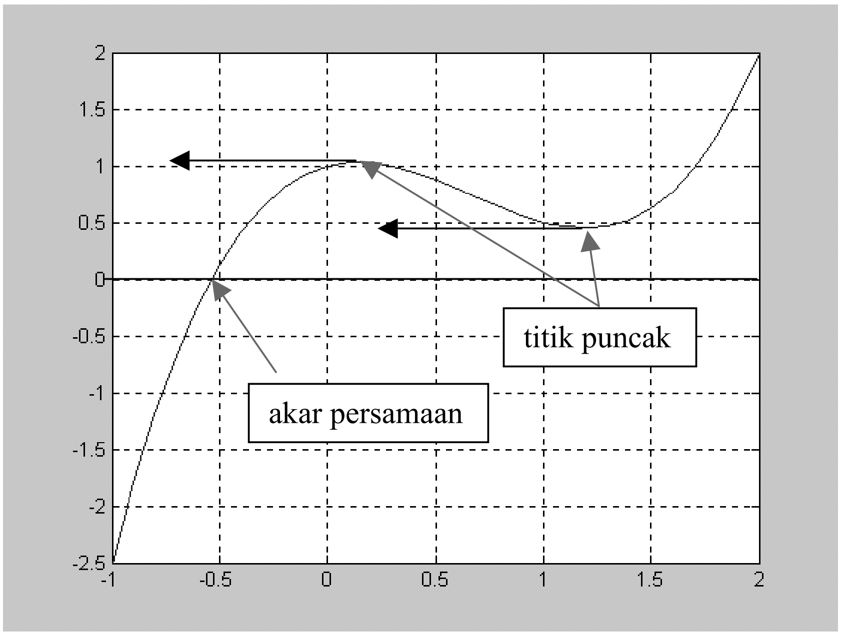
Contoh 3. 8:
Hasil penyelesaian persamaan x + e^{-x} cos x -2 = 0 dengan titik pendekatan awal x_0=1 dan perhatikan bahwa :
f(x) = x + e^{-x} cos x - 2
f'(x) = 1 – e^{-x} cos x – e^{-x} sin x

Pada program diatas, tuliskan fungsi-fungsi ini pada definisi fungsi: f(x) pada fungsi dan f'(x) pada turunan.
Hasilnya adalah:

Iterasi	**x**	**f(x)**	**f'(x)**
0	1	-0.801234	0.491674
1	2.6296	0.566743	1.02753
2	2.07805	0.0172411	0.951394
3	2.05993	3.62703e-005	0.947372
4	2.05989	1.64926e-010	0.947364
Akar terletak di x = 2.05989			

Permasalahan pada pemakaian metode newton raphson adalah :

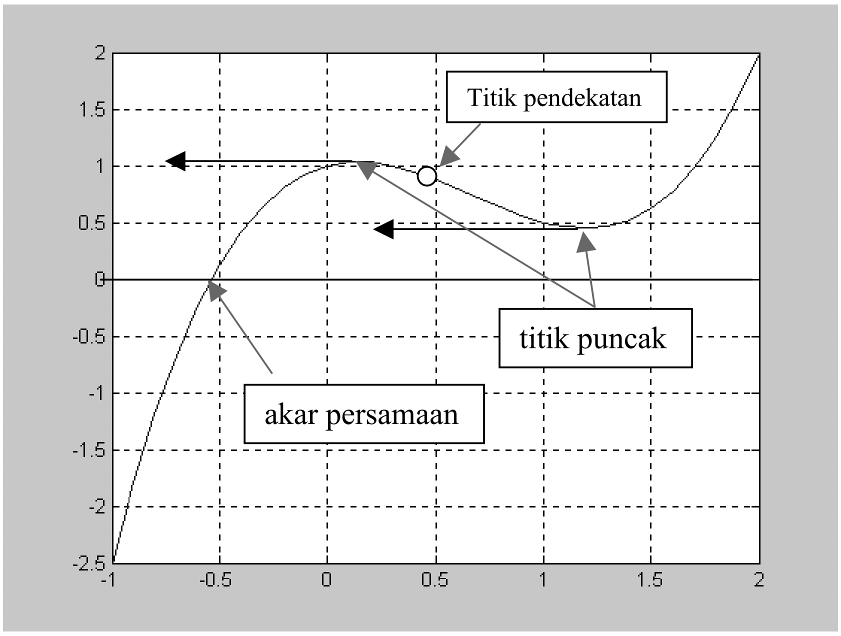
1. Metode ini tidak dapat digunakan ketika titik pendekatannya berada pada titik ekstrim atau titik puncak, karena pada titik ini nilai $F^1(x) = 0$ sehingga nilai penyebut dari $\frac{F(x)}{F^1(x)}$ sama dengan nol, secara grafis dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 3.7. Pendekatan pada titik puncak

Bila titik pendekatan berada pada titik puncak, maka titik selanjutnya akan berada di tak berhingga.

2. Metode ini menjadi sulit atau lama mendapatkan penyelesaian ketika titik pendekatannya berada di antara dua titik stasioner.



Gambar 3.8. Titik pendekatan berada diantara 2 titik puncak

Bila titik pendekatan berada pada dua tiitik puncak akan dapat mengakibatkan hilangnya penyelesaian (*divergensi*). Hal ini disebabkan titik selanjutnya berada pada salah satu titik puncak atau arah pendekatannya berbeda.

Untuk dapat menyelesaikan kedua permasalahan pada metode newton raphson ini, maka metode newton raphson perlu dimodifikasi dengan :

1. Bila titik pendekatan berada pada titik puncak maka titik pendekatan tersebut harus di geser sedikit, $x_i = x_i \pm \delta$ dimana δ adalah konstanta yang ditentukan dengan demikian $F^1(x_i) \neq 0$ dan metode newton raphson tetap dapat berjalan.
2. Untuk menghindari titik-titik pendekatan yang berada jauh, sebaiknya pemakaian metode newton raphson ini didahului oleh metode tabel, sehingga dapat di jamin konvergensi dari metode newton raphson.

Contoh 3. 9:
Selesaikan persamaan :

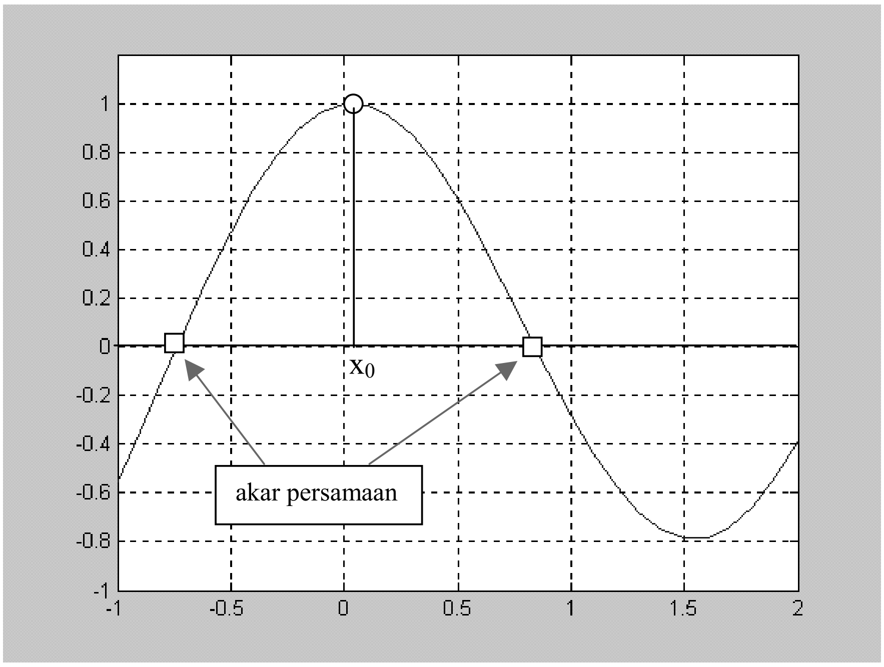
$x \cdot e^{-x} + \cos(2x) = 0$

Bila menggunakan titik pendekatan awal x_0 = 0,176281

$f(x) = x \cdot e^{-x} + \cos(2x)$

$f^1(x) = (1-x)\, e^{-x} - 2 \sin(2x)$

Sehingga $F(x_0)$ = 1,086282 dan $F^1(x_0)$ = -0,000015
Perhatikan grafik dari fungsi ini:



Gambar 3.9. Grafik $y=x.e^{-x}+cos(2x)$

Iterasi menggunakan metode Newton Raphson adalah sebagai berikut:

iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,17628	1,086282	-1,52216E-05
1	71364,89	0,594134	-1,608732696
2	71365,26	-0,10227	-1,989513691
3	71365,2	0,00036	-1,99999987
4	71365,2	-2,9E-11	-2
5	71365,2	3,13E-13	-2
6	71365,2	3,13E-13	-2

Akar yang ditemukan adalah x=71365, padahal dalam range 0 sampai dengan 1 terdapat akar di sekitar 0.5 s/d 1.

Untuk menghindari ini sebaikan digunakan grafik atau tabel sehingga dapat diperoleh pendekatan awal yang baik.

Bila digunakan pendekatan awal x_0=0.5 maka dengan iterasi dari metode Newton Raphson diperoleh:

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	0,5	0,843568	-1,37967664
1	1,111424	-0,24106	-1,626349133
2	0,963203	0,019463	-1,86082504
3	0,973662	5,61E-05	-1,849946271
4	0,973692	4,98E-10	-1,849913417
5	0,973692	0	-1,849913417
6	0,973692	0	-1,849913417

Akar yang ditemukan adalah x=0.973692.

Algoritma Metode Newton Raphson dengan modifikasi tabel :

1. Definisikan fungsi F(x)
2. ambil range nilai x = $[a,b]$ dengan jumlah pembagi n
3. Masukkan torelansi error (e) dan masukkan iterasi n
4. Gunakan algoritma tabel diperoleh titik pendekatan awal x_0 dari :
   $F(x_k) \,.\, F(x_{k+1})<0$ maka $x_0 = x_k$
5. Hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$
6. Bila $F\left(abs\left(F^1(x_0)\right)\right) < e$ maka pendekatan awal x_0 digeser sebesar dx (dimasukkan)
   $x_0 = x_0 + dx$
   hitung $F(x_0)$ dan $F^1(x_0)$
7. Untuk iterasi I= 1 s/d n atau $|F(x_i)| \geq e$
   $x_1 = x_{i-1} - \dfrac{F(x_{i-1})}{F^1(x_{i-1})}$
   hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_i)$
   bila $|F^1(x_i)| < e$ maka
   $x_i = x_i + dx$
   hitung $F(x_i)$ dan $F^1(x_0)$

8.Akar persamaan adalah x terakhir yang diperoleh.

Dengan menggunakan algoritma newton raphson yang dimodifikasikan diharapkan akar yang diperoleh sesuai dengan harapan dan bila terdapat lebih dari satu akar dalam range ditunjuk, akan ditampilkan semuanya.

Contoh 3. 10:
Hasil dari penyelesaian persamaan x * exp(-x) + cos(2x) = 0 pada range [0,5] adalah sebagai berikut :

Iterasi	**x**	**f(x)**	**f'(x)**
0	0.5	0.843568	-1.37968
1	1.11142	-0.24106	-1.62635
2	0.963203	0.0194632	-1.86083
3	0.973662	5.6107e-005	-1.84995
4	0.973692	4.98195e-010	-1.84991
Akar terletak di x = 0.973692			

Iterasi	**x**	**f(x)**	**f'(x)**
0	2	-0.382973	1.37827
1	2.27787	0.0774688	1.84452
2	2.23587	0.000671812	1.81025
3	2.23549	6.74538e-008	1.80989
Akar terletak di x = 2.23549			

Iterasi	x	f(x)	f'(x)
0	3.5	0.859593	-1.38947
1	4.11865	-0.307004	-1.90559
2	3.95754	0.0145632	-2.05279
3	3.96464	7.5622e-006	-2.05059
Akar terletak di x = 3.96464			

3.6. Metode Secant

Metode secant merupakan perbaikan dari metode regula-falsi dan newton raphson dimana kemiringan dua titik dinyatakan sacara diskrit, dengan mengambil bentuk garis lurus yang melalui satu titik.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

dimana m diperoleh dari:

$$m_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Bila y = F(x), n_y dan x_n diketahui maka titik ke n+1 adalah :

$$y_{n+1} - y_n = m_n(x_{n+1} - x_n)$$

Bila titik x_{n+1} dianggap akar persamaan maka :

$$y_{n+1} = 0$$

sehingga diperoleh :

$$-y_n = m_n(x^{n+1} - x_n)$$

$$\frac{m_n x_n - y_n}{m_n} = x_{n+1}$$

atau :

$$x_{n+1} = x_n - y_n \cdot \frac{1}{m_n}$$

$$x_{n+1} = x_n - y_n \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$$

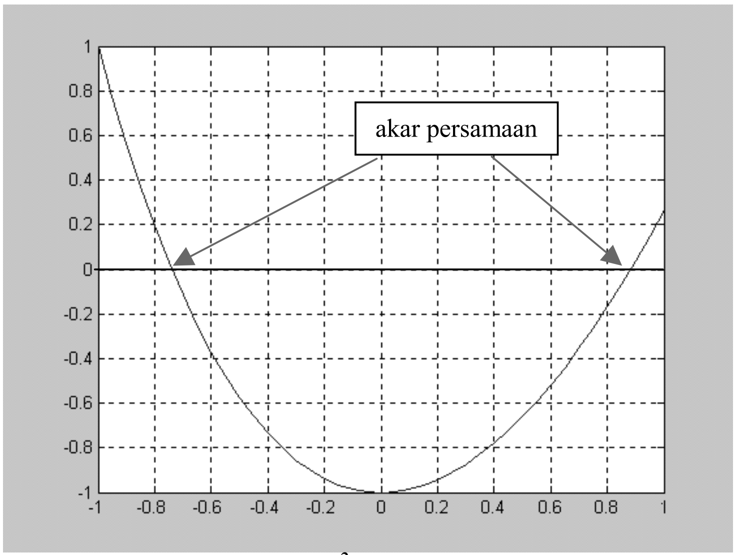
Persamaan ini yang menjadi dasar pada proses pendekatan dimana nilai pendekatannya adalah : $\delta_n = -y_n \dfrac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$

Sehingga untuk menggunakan metode secant ini diperlukan dua titik pendekatan x_0 dan x_1. Kedua titik pendekatan ini diambil pada titik-titik yang dekat agar konvergensinya dapat dijamin.

Contoh 3. 11:

Selesaikan persamaan : $x^2 - (x + 1)\, e^{-x} = 0$

Untuk dapat menyelesaikan persamaan ini terlebih dahulu digambarkan grafik atau digunakan metode tabel untuk mengetahui range atau 2 nilai pendekatan awal yang baik.



Gambar 3.9. Fungsi $y=x^2-(x+1).e^{-x}$ untuk range [-1,1]

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa akar terletak pada range x = $[08,0,9]$, maka ambil x_0 = 0,8 dan x_1 = 0,9 maka dapat dihitung

$y_0 = F(x_0) = -0,16879$

$y_1 = F(x_1) = 0,037518$

Iterasi Metode Secant adalah sebagai berikut :

Iterasi 1 : $x_2 = x_1 - y_1 \dfrac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} = 0,881815$

$y_2 = 0,00153$

Iterasi 2 : $x_3 = x_2 - y_2 \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = 0,882528$

$y_3 = 1,3.10^{-5}$

Iterasi 3 : $x_4 = x_3 - y_3 \dfrac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} = 0,882534$

$y_4 = 4,91.e^{-9}$

Diperoleh akar x = 0,882534

Algoritma Metode Secant :

1. Definisikan fungsi F(x)
2. Definisikan torelansi error (e) dan iterasi maksimum (n)
3. Masukkan dua nilai pendekatan awal yang di antaranya terdapat akar yaitu x_0 dan x_1, sebaiknya gunakan metode tabel atau grafis untuk menjamin titik pendakatannya adalah titik pendekatan yang konvergensinya pada akar persamaan yang diharapkan.
4. Hitung $F(x_0)$ dan $F(x_1)$ sebagai y_0 dan y_1

5. Untuk iterasi I = 1 s/d n atau $|F(x_i)| \geq e$

$$x_{i+1} = x_i - y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}$$

hitung $y_{i+1} = F(x_{i+1})$

6. Akar persamaan adalah nilai x yang terakhir.

Contoh 3. 12:

Hasil untuk penyelesaian persamaan : $x^2 - (x + 1)\, e^{-x} = 0$ dengan pendekatan awal di 0.8 dan 0.9, dan toleransi error 0.00001 adalah sebagai berikut:

Iterasi	x	f(x)
1	0.881815	-0.00153183
2	0.882528	-1.27506e-005
3	0.882534	4.41217e-009
Akar persamaan di x = 0.882534		

3.7. Contoh Kasus Penyelesaian Persamaan Non Linier

Penyelesaian persamaan non linier terkadang muncul sebagai permasalahan yang terpisah, tetapi terkadang pula muncul sebagai satu kesatuan atau satu rantai dari penyelesaian permasalahan dimana penyelesaian persamaan non linier justru menjadi kunci dalam perhitungannya. Beberapa contoh permasalahan dimana memerlukan penyelesaian persamaan non linier sebagai kuncinya adalah sebagai berikut:

- Penentuan nilai maksimal dan minimal fungsi non linier
- Perhitungan nilai konstanta pada matrik dan determinan, yang biasanya muncul dalam permsalahan sistem linier, bisa digunakan untuk menghitung nilai eigen
- Penentuan titik potong beberapa fungsi non linier, yang banyak digunakan untuk keperluan perhitungan-perhitungan secara grafis.

Dan masih banyak lagi yang lainnya dan tidak mungkin dapat dibahas semua dalam satu buku yang singkat ini.

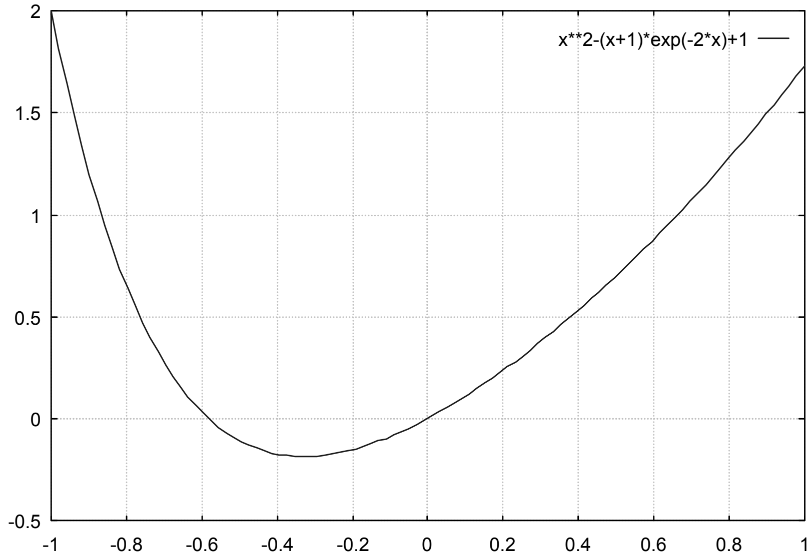
3.7.1. Penentuan Nilai Maksimal dan Minimal Fungsi Non Linier

Penentuan nilai maksimal dan minimal pada fungsi non linier sebenarnya merupakan permasalahan penyelesaian persamaan non-linier. Pada penyelesaian persamaan non linier dengan fungsi f(x), maka dicari x yang memenuhi f(x)=0. Sedangkan pada penentuan nilai maksimal dan minimal dari fungsi f(x), yang dicari adalah nilai x yang memenuhi f'(x)=0.

Jadi sebelum menggunakan metode numerik untuk menentukan nilai maksimal dan nilai minimal pada fungsi f(x), maka terlebih dahulu dihitung g(x)=f'(x). Nilai fungsi g(x) inilah yang menjadi fungsi acuan untuk menentukan nilai x dimana g(x)=0. tetapi pemakaian metode numerik di sini tidak dapat menunjukkan apakah nilai yang dihasilkan adalah nilai maksimal atau nilai minimal, karena sifat maksimal dan minimal ditentukan oleh f''(x). Sehingga untuk menyajikan apakah titik yang diperoleh adalah titik maksimal atau titik minimal, maka perlu dihitung g'(x).

Contoh 3. 13:

Tentukan nilai minimal dari $f(x) = x^2-(x+1)e^{-2x}+1$



Dari gambar di atas nilai minimal terletak antara –0.4 dan –0.2

Untuk menentukan nilai minimal terlebih dahulu dihitung g(x)=f'(x)

$$g(x) = 2x - e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} = 2x+ (2x+1)e^{-2x}$$

Jadi permasalahannya menjadi menyelesaikan persamaan :

$$2x+ (2x+1)e^{-2x} = 0$$

Dengan menggunakan metode Secant diperoleh :

```
Pendekatan awal di x0=-0.4 dan x1=-0.2
Toleransi error = 1e-005
Iterasi    x          f(x)
1          -0.316495  0.0581765
2          -0.332006  -0.0113328
3          -0.329477  0.000208218
4          -0.329523  7.28621e-007
Akar persamaan di x = -0.329523
```

Jadi nilai minimal fungsi f(x) terletak di x=-0.329523

3.7.2. Penentuan Nilai Eigen Pada Matrik

Nilai eigen pada suatu matrik A, merupakan nilai-nilai yang menyajikan karakteristik kestabilan matrik. Nilai eigen ini dapat dihitung menggunakan :

$$\left|A - \lambda I\right| = 0$$

dimana I adalah matrik identitas dan λ adalah nilai eigen dari matrik A.

Bila matrik A mempunyai ukuran nxn maka akan terdapat n nilai λ yang disajikan dalam bentuk persamaan polinomial pangkat n sebagai berikut :

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + .. + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Untuk menentukan nilai λ merupakan permasalahan penyelesaian persamaan non linier.

Contoh 3. 14:
Tentukan nilai eigen dari :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dapat diperoleh dengan :

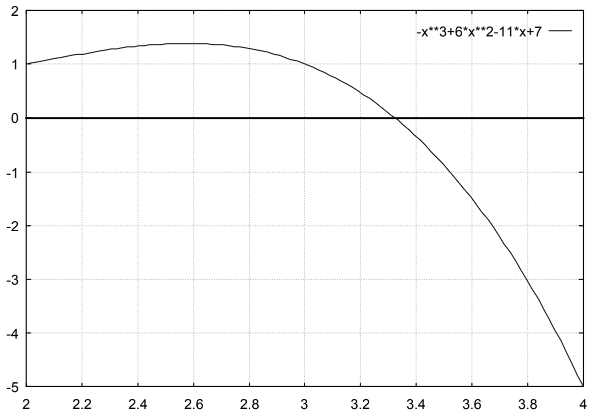
$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau bisa dituliskan dengan :

$$(2-\lambda)\{(3-\lambda)(1-\lambda)\} + 1 = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 7 = 0$$

Secara grafis bisa digambarkan :



Terlihat akar persamaan terletak pada x antara 3.2 dan 3.4

Dengan menggunakan metode secant diperoleh:

```
Pendekatan awal di x0 = 3.2 dan x1 = 3.4
Toleransi error = 1e-005
Iterasi     x           f(x)
1           3.31569     0.0381934
2           3.32411     0.00258307
3           3.32472     -2.18963e-005
4           3.32472     1.23711e-008
Akar persamaan di x = 3.32472
```

3.7.3. Menghitung Nilai Akar

Perhitungan nilai akar a dapat dilakukan dengan menggunakan persamaan $f(x)=x^2-a$. Ini dapat dilakukan dengan menghitung penyelesaian dari persamaan :

$$x^2 - a = 0$$

Contoh 3. 15:
Menghitung akar 3 dapat dilakukan dengan menyelesaikan persamaan :

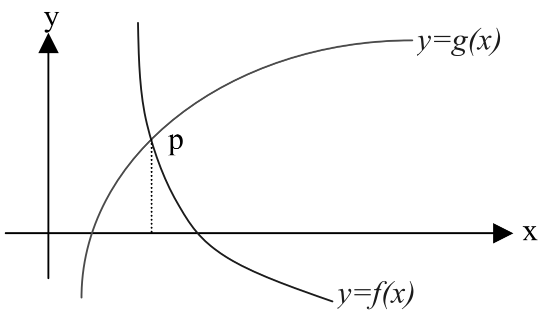
$$x^2 - 3 = 0$$

Dengan menggunakan metode secant diperoleh :

```
Pendekatan awal di x0 = 1 dan x1 = 2
Toleransi error = 1e-005
Iterasi    x          f(x)
1          1.66667    -0.222222
2          1.72727    -0.0165289
3          1.73214    0.000318878
4          1.73205    -4.40416e-007
Akar persamaan di x = 1.73205
```

3.7.3. Menghitung Titik Potong 2 Buah Kurva

Perhatikan dua buah kurva *y=f(x)* dan *y=g(x)* yang berpotongan di titik *p* seperti gambar berikut :



Untuk menentukan titik potong dua buah kurva di atas secara numerik maka pertama kali yang harus dilakukan adalah menentukan fungsi dari persamaan dimana titik ptong didefinisikan dengan :

f(x) = g(x)

atau

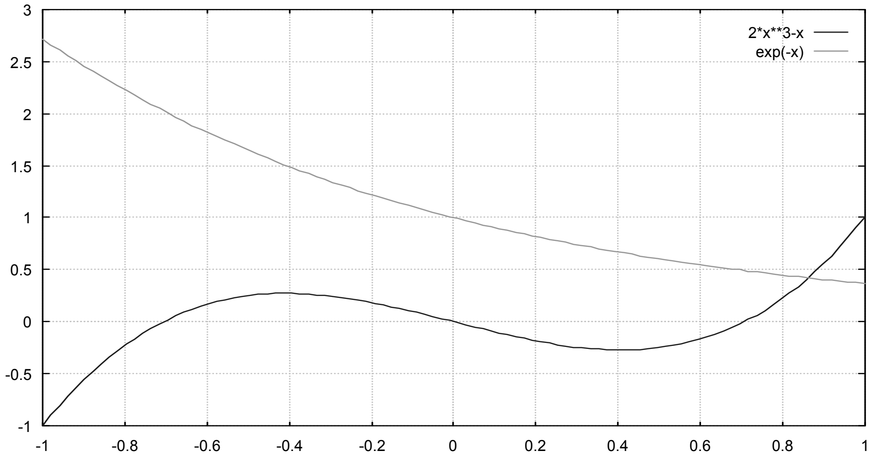
f(x) – g(x) = 0

Maka fungsi persamaannya adalah f(x)-g(x).

Contoh 3. 16:

Tentukan titik potong $y=2x^3-x$ dan $y=e^{-x}$

Perhatikan gambar kedua kurva tesebut sebgai berikut:



Dari gambar di atas terlihat akar terletak di antara 0.8 dan 1.

Dengan menggunakan metode Secant, terlebih dahulu disusun fungsi dari persamaannya adalah sebagai berikut:

$$y=2x^3-x - e^{-x}$$

Pemakaian metode secant dengan titik pendekatan awal 0,8 dan 1 adalah sebagai berikut:

```
Pendekatan awal di x0 = 0.8 dan x1 = 1
Toleransi error = 1e-005
i  x          f(x)
1  0.852558  -0.0395088
2  0.861231  -0.00628888
3  0.862873  8.36952e-005
4  0.862852  -1.73417e-007
Akar persamaan di x = 0.862852
```

3.8. TUGAS

(1) Hitung nilai akar 27 dan akar 50

(2) Hitung nilai eigen dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

(3) Tentukan nilai puncak pada kurva $y=x^2+e^{-2x}\sin(x)$ pada range x=[0,10]

(4) Gunakan metode newton raphson, regula falsi dan secant untuk menghitung akar 10. Perhatikan kesalahan dan jumlah iterasinya dan ambil kesimpulan.

(5) Tentukan titik potong lingkaran dengan titik pusat (1,0) dan jari-jari 2 dengan kurva $y=x^2$

(6) Tentukan titik potong antara $y=x.e^{-x}$ dan $y=x^2$ dengan menggunakan metode secant dan newton raphson. Bandingkan jumlah iterasi dan kesalahannya.

(7) Tentukan titik puncak dari $y=x.e^{-2x}$.