BAB 2
SISTEM BILANGAN DAN KESALAHAN

2.1. Penyajian Bilangan Bulat

Bilangan bulat yang sering digunakan adalah bilangan bulat dalam sistem bilangan desimal yang didefinisikan :

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= \left(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0\right) \\ &= a_n a^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \ldots + a_0 10^0 \end{aligned}$$

Contoh :

$2673 = 2.10^3 + 6.10^2 + 7.10^1 + 3.10^0$

Bilangan bulat dengan bilangan dasar c didefinisikan dengan :

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= \left(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0\right)_c \\ &= a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + a_{n-2} c^{c-2} + \ldots + a_0 c^0 \end{aligned}$$

Bilangan biner atau bilangan dasar 2, dapat didefinisikan seperti formulasi di atas dengan mengganti c dengan 2, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= \left(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0\right)_2 \\ &= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + a_{n-2} a^{n-2} + \ldots + a_0 2^0 \end{aligned}$$

Contoh :

$(1101)_2 = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^2$

Algoritma 2.1.
Bila diketahui koefisien-koefisien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dari polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

dan suatu bilangan β.Maka dapat dihitung $b_n, b_{n-1}, .., b_0$ dari β sebagai berikut :

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + b_n \beta \\ b_{n-2} &= a_{n-2} + b_{n-1} \beta \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0 &= a_0 + b_1 \beta. \end{aligned}$$

Algoritma ini banyak digunakan untuk menghitung konversi bilangan secara cepat, karena dalam algoritma ini tidak terdapat pemakaian pangkat yang membuat kesalahan numerik menjadi lebih besar.

Contoh :
Bilangan biner $(1101)_2$ dapat dihitung dengan ;

$$b_3 = 1$$
$$b_2 = b_3 + a_3\beta = 1 + 1.2 = 3$$
$$b_1 = b_2 + a_2\beta = 0 + 3.2 = 6$$
$$b_0 = 1 + a_1\beta = 1 + 6.2 = 13$$

Jadi $(1101)_2 = 13$

Contoh :
Bilangan oktal $(721)_8$ dapat dihitung dengan :

$$b_2 = 7$$
$$b_1 = 2 + 7.8 = 2 + 5.6 = 58$$
$$b_0 = 1 + 58.8 = 1 + 464 = 465$$

Jadi $(721)_8 = 465$.

Contoh :

$$187 = (187)_{10} = 1.10^2 + 8.10^1 + 7.10^0$$
$$= (1)_2(1010)_2^2 + (1000)_2(1010)_2^1 + (111)_2$$

Dengan algoritma di atas :

$$b_2 = (1)_2$$
$$b_1 = (1000)_2 + (1)_2(1010)_2 = (1000)_2 + (1010)_2$$
$$= (10010)_2$$
$$b_0 = (111)_2 + (10010)_2(1010)_2$$
$$= (111)_2 + (10110100)_2 = (10111011)_2$$

Jadi $187 = (10111011)_2$

2.2. Penyajian Bilangan Pecahan

Bilangan pecahan x antara 0 s/d 1 dalam sistem bilangan desimal didefinisikan :

$$x = (a_1a_2a_3...a_n) = a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + ... + a_n 10^{-n}$$

Bilangan pecahan x secara umum dalam sistem bilangan dengan bilangan dasar k didefinisikan :

$$(a_1a_2a_3...a_n)_k = \sum_{i=1}^{n} a_i k^{-i}$$

Contoh :

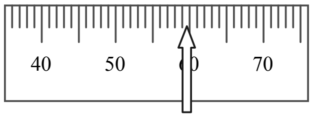
$$0,625 = 6.10^{-1} + 2.10^{-2} + 5.10^{-3}$$

Contoh :

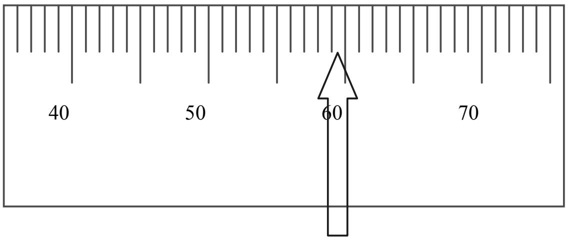
$$(0,101)_2 = 1.2^{-1} + 0.2^{-2} + 1.10^{-3}$$
$$= 0.5 + 0,125$$
$$= 0,625$$

2.3. Nilai Signifikan

Nilai signifikan adalah suatu nilai dimana jumlah angka ditentukan sebagai batas nilai tersebut diterima atau tidak. Sebagai contoh perhatikan nilai pada penggaris :



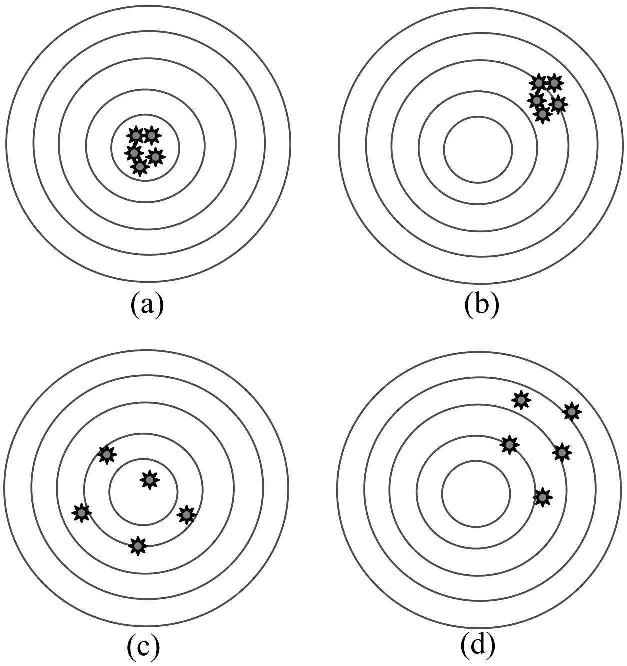
Nilai yang ditunjuk tidak tepat pada angka yang ditentukan karena selisih 1 strip, dalam kejadian ini bila dianggap nilai signifikan = 1 maka nilainya 59 atau 60.
Bila penggaris tersebut dilihat dengan skala lebih besar pada daerah yang ditunjuk oleh jarum :



Dari gambar ini, dengan nilai signifikan 10^{-1} (0,1) maka diperoleh nilainya 59 atau 59,5.

2.4. Akurasi Dan Presisi

Peerhatikan hasil tembakan yang dilakukan oleh 4 orang seperti gambar berikut :



Dari 4 gambar di atas, gambar (a) menunjukkan hasil yang akurat dan presisi.Gambar (b) menunjukkan hasil yang presisi tetapi tidak akurat. Gambar (c) menunjukkan hasil yang sebenarnya akurat teteapi tidak presisi. Dan gambar (d) menunjukkan hasil yang tidak akurat dan tidak presisi. Akurasi dalam hal ini sangat tergantung pada penembak, dan presisi tergantung pada senapan dan perlengkapannya.

Nilai presisi mengacu pada jumlah angka signifikan yang digunakan dan sebaran bacaan berulang pada alat ukur.Pemakaian alat ukur penggaris dan jangka sorong akan mempunyai perbedaan nilai presisi.Pemakaian jangka sorong mempunyai presisi yang lebih tinggi.

Nilai akurat atau akurasi mengacu pada dekatnya nilai pendekatan yang dihasilkan dengan nilai acuan atau nilai eksak.Misalkan nilai eksak diketahui ½, sedangkan hasil pendekatan adalah 0.500001 maka hasil ini dikatakan akurat bila torelansinya 10^{-4}.

Dari keadaan akurat dan presisi ini, akan muncul apa yang dinamakan kesalahan (error).Dalam analisa numerik, dimana penyelesaian dihitung menggunakan nilai-nilai pendekatan, error menjadi hal yang sangat penting dan diperhatikan.

2.5. Pendekatan Dan Kesalahan

Kesalahan di dalam metode numerik dibagi menjadi dua macam yaitu:

1. Kesalahan pembulatan (*round of error*)
2. Kesalahan pemotongan (*truncation error*)

Kesalahan pembulatan adalah kesalahan yang disebabkan oleh pembulatan misalnya 0.4 menjadi 0 atau 0,5 menjadi 1.Sedangkan kesalahan pemotongan adalah kesalahan yang ditimbulkan pada saat dilakukan pengurangan jumlah angka signifikan.

Kesalahan numerik adalah kesalahan yang timbul karena adanya proses pendekatan.Hubungan kesalahan dan penyelesaian adalah :

$$\hat{x} = x + e$$

dimana $\hat{x}$ adalah nilai yang sebenarnya (nilai eksak)

x adalah nilai pendekatan yang dihasilakan dari metode numerik

e adalah kesalahan numerik.

Kesalahan fraksional adalah prosentase antara kesalahandan nilai sebenarnya.

$$\in = \left(\frac{e}{\hat{x}} \right) x100\%$$

Pda banyak permasalahan kesalahan fraksional di atas sulit atau tidak bisa dihitung, karena nilai eksaknya tidak diketahui.Sehingga kesalahan fraksional dihitung berdasarkan nilai pendekatan yang diperoleh:

$$\in = \left(\frac{e}{x} \right) \times 100\%$$

dimana e pada waktu ke n adalah selisih nilai pendekatan ke n dan ke n-1

$$\in = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right) \times 100\%$$

Perhitungan kesalahan semacam ini dilakukan untuk mencapai keadaan konvergensi pada suatu proses iterasi.

Definisi Konvergensi.
Suatu barisan $a_1, a_2, ...$ dikatakan konvergen ke α jika dan hanya jika untuk semua e>0 terdapat bilangan bulat $\eta_0(\in)$. Sedemikian hingga untuk semua n$\geq \eta_0$ terdapat $|\alpha - \alpha_n| < \in$.

Dari definisi ini, dapat dikatakan bahwa penyelesaian dalam metode numerik dicari berdasarkan selisih hasil saat ini dengan hasil sebelumnya.Metode ini dapat menghindari jumlah iterasi yang sangat besar tetapi terkadang tidak akurat.